

ÉDITION  
FÉVRIER  
2024

Florence Grandchamp  
Drita Neziri  
Abdelkader Amara  
Raymond Thériault

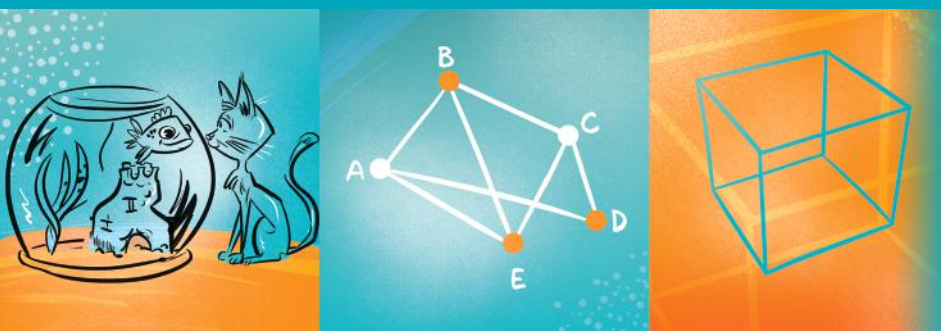
OPTIMISATION  
EN CONTEXTE GÉNÉRAL

# MAT




CST

# A 5150 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE



## Graphismes, notations et symboles

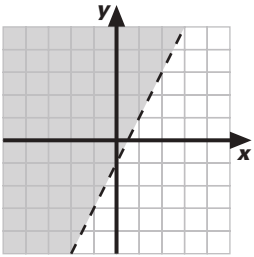
$(20, 80)$	couple de coordonnées 20 et 80
$<$	est plus petit que, est inférieur à
$\leq$	est plus petit ou égal à, est inférieur ou égal à
$>$	est plus grand que, est supérieur à
$\geq$	est plus grand ou égal à, est supérieur ou égal à
$Z$	fonction objectif ou économique
$d(A)$	degré du sommet A
	arête AB
	arc AB
	boucle AA
$A$	aire
$A_l$	aire latérale
$A_t$	aire totale
$V$	volume

Graphismes, notations  
et symboles utilisés  
dans ce module

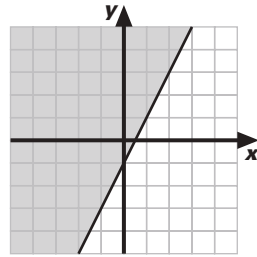
Rappel de quelques notions



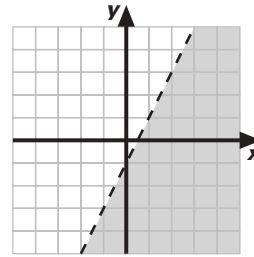
## Représentation graphique d'une inéquation



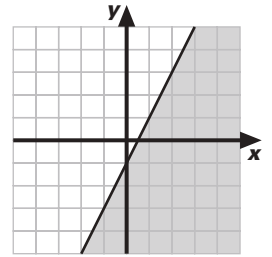
$$y > 2x - 1$$



$$y \geq 2x - 1$$



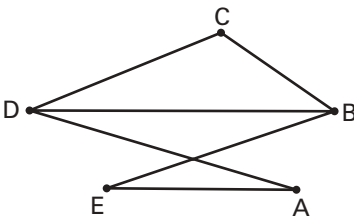
$$y < 2x - 1$$



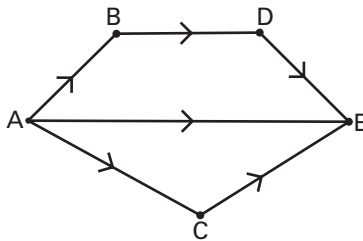
$$y \leq 2x - 1$$

## Les différents types de graphes

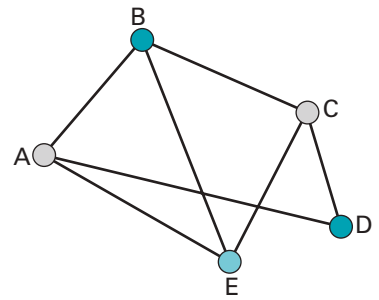
### Grphe simple



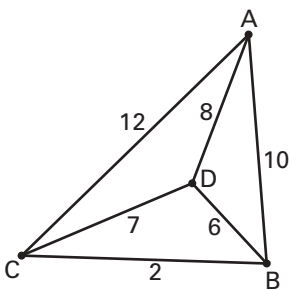
### Grphe orienté



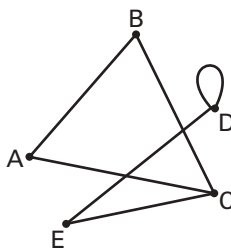
### Grphe coloré



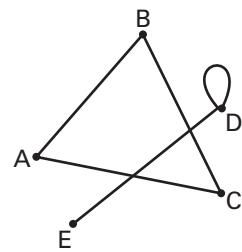
### Grphe valué



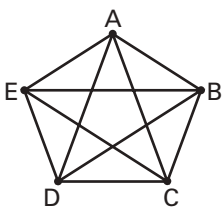
### Grphe connexe



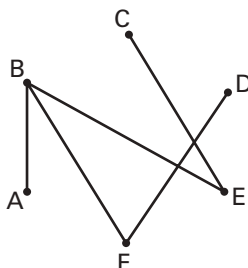
### Grphe non connexe



### Grphe complet



### Arbre



# OPTIMISATION EN CONTEXTE GÉNÉRAL

Conforme au Programme



# MAT<sub>CST</sub> 5150 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

**NE ME JETEZ PAS !**  
GARDEZ-MOI  
COMME AIDE-MÉMOIRE



Car « *la mémoire est une faculté qui oublie* »  
... en maths comme en toutes choses.

CE LIVRE APPARTIENT À : \_\_\_\_\_

La collection



Tous les titres  
de la collection MAT  
au catalogue



### FORMATION DE BASE COMMUNE:

#### Présecondaire

MAT P101 4      MAT P102 3      MAT P103 2      MAT P104 4

#### Secondaire 1

MAT 1101 3      MAT 1102 3

#### Secondaire 2

MAT 2101 3      MAT 2102 3

#### Mise À Niveau

MAN P100      MAN 1100      MAN 2100

### FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE:

#### Secondaire 3

MAT 3051 2      MAT 3052 2      MAT 3053 2

#### Secondaire 4

CST      MAT 4151 1      MAT 4152 1      MAT 4153 2

TS      MAT 4261 2      MAT 4262 2      MAT 4263 2

SN      MAT 4271 2      MAT 4272 2      MAT 4273 2

#### Secondaire 5

CST      **MAT 5150 2**      MAT 5151 1      MAT 5152 1

TS      MAT 5160 2      MAT 5161 2      MAT 5163 2

SN      MAT 5170 2      MAT 5171 2      MAT 5173 2

### FORMATION À DISTANCE:

#### Secondaire 1, 2 et 3

Tous les guides d'apprentissage du secondaire 1, 2 et 3 ont été adaptés pour les besoins de la formation à distance. Pour en savoir plus: voyez notre site [www.ebbp.ca](http://www.ebbp.ca)

**Secondaire 4 et 5** — *En préparation*

#### Ouvrages déjà parus au catalogue:

MAT 1005 2	MAT 1006 2	MAT 1007 2	MAT 2006 2	MAT 2007 2	MAT 2008 2
MAT 3015 2	MAT 3016 2	MAT 3017 2			
MAT 4101 2	MAT 4102 1	MAT 4103 1	MAT 4104 2	MAT 4105 1	MAT 4106 1
MAT 4107 1	MAT 4108 1	MAT 4109 1	MAT 4110 1	MAT 4111 2	
MAT 5101 1	MAT 5102 1	MAT 5103 1	MAT 5104 1	MAT 5105 1	MAT 5106 1
MAT 5107 2	MAT 5108 2	MAT 5109 1	MAT 5110 1	MAT 5111 2	MAT 5112 1
MAN 1000	MAN 2000	MAN 3000		MAT 1005 FAD à MAT 5112 FAD	



L'ensemble des titres admissibles de notre production bénéficie du soutien financier du gouvernement du Canada.

Communication et pédagogie	Christiane Beullac
Composition et index	Audrey d'Amboise Francisca Martinez Galvez Valérie Tardif
Conseiller en mathématiques	Raymond Thériault
Correction	Jonathan Crête
Direction de la collection	
• contenu éditorial	Célestin de La Grange Annie Lopez
• contenu mathématique	Florence Grandchamp
• infographie et production	Francine Plante
Idéatrice	Marianne Delaroche
Illustrations	Paul Bordeleau
Informatique éditoriale	Francisca Martinez Galvez
Maquette de la couverture	Jean-Sébastien Lajeunesse Michel Lajeunesse
Maquette de l'ouvrage	Célestin de La Grange Francine Plante
Réécriture	Jonathan Crête
Révision mathématique	Sylvain Gervais

### À propos de photocopie

Photocopier sans permission un imprimé — une œuvre complète ou un passage d'une œuvre —, c'est aussi plagier. C'est aussi s'approprier indûment le fruit du travail d'un auteur.

Et, la plupart du temps, la photocopie gâte l'œuvre, et fait perdre le bénéfice de cinq cents ans de pratique de l'imprimerie : c'est un péché contre l'esprit, en plus d'être un acte malhonnête.

Photocopier sans permission : c'est voler.

Méprisons la photocopie sauvage. Méprisons le vol.

### Droits d'auteur et droits de reproduction

Toutes les demandes de reproduction doivent être acheminées à : Copibec (reproduction papier) 514 288-1664 1 800 717-2022 [licences@copibec.qc.ca](mailto:licences@copibec.qc.ca)

© Œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute reproduction interdite sans autorisation de l'éditeur.

Tout usage en location ou prêt est interdit sans autorisation écrite octroyée par Kinésis éducation inc.

Impression	Imprimerie Héon & Nadeau
Éditrice déléguée	Francine Plante / Les Éditions Jules Châtelain

Page des crédits



Pour en savoir plus sur l'illustrateur et sur les illustrations de votre module, voir p. 373



## À L'ÉTUDIANT ET À L'ENSEIGNANT POUR CETTE PREMIÈRE ÉDITION 2022

Vous avez en main la première édition revue et corrigée du module MAT 5150, treizième module de notre collection MAT FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE.

Les auteurs, les correcteurs, les réviseurs et toute l'équipe éditoriale et technique ont fait de leur mieux pour que cet ouvrage respecte l'esprit et la lettre du programme, et réponde à vos attentes et à vos besoins. Mais nul, ni rien, n'est parfait sur terre: moins que quiconque, nous prétendons avoir atteint la perfection, même après révision et correction.

**Les auteurs et l'éditeur demandent aux utilisateurs – étudiants et enseignants – de leur faire part de leurs commentaires et de leurs suggestions le plus tôt possible pour que nous puissions dès la prochaine impression apporter les retouches, les modifications ou les ajouts qui se révéleraient nécessaires.**

D'autre part, n'hésitez pas à nous signaler coquilles ou erreurs si vous en trouvez: **nous ne procédons jamais à une réimpression sans avoir d'abord effectué les corrections ou les retouches nécessaires.** Un ouvrage didactique n'est pas une œuvre immuable, au contraire, c'est un outil perfectible et en perpétuel devenir.

Avec la collaboration de toutes et de tous, nous pourrions ensemble améliorer et raffiner, au fil des ans, un document dont nous voudrions qu'il soit pour vous l'outil rêvé. Nous ferons tout pour qu'il le devienne.

Écrivez-nous, téléphonez-nous, ou adressez-nous un courriel à l'adresse **cbeullac@ebbp.ca**, la responsable des communications et notre responsable de la correspondance. Nous accusons toujours réception de la correspondance reçue des utilisateurs. Vous pouvez aussi nous visiter sur le site [www.ebbp.ca](http://www.ebbp.ca).

N'hésitez surtout pas!



Depuis plus de soixante-cinq ans, nous n'avons jamais cessé de travailler en étroite collaboration avec le monde de l'enseignement, et nous voulons continuer de le faire: que vous soyez étudiant ou enseignant, merci de garder le contact avec nous par le moyen qui vous est le plus commode: téléphone, télécopieur, courriel.

L'éditeur

**KINÉSIS ÉDUCATION**

**Bureau 275, 4823, rue Sherbrooke Ouest, Westmount, Québec H3Z 1G7**

**Téléphone: 514 932-9466    Télécopieur: 514 932-5929**

**Courriel: [cbeullac@ebbp.ca](mailto:cbeullac@ebbp.ca)    Site: [www.ebbp.ca](http://www.ebbp.ca)**

Graphismes, notations et symboles	
Représentation graphique d'une inéquation	page 3 de couverture
Les différents types de graphes	page 3 de couverture
À l'étudiant et à l'enseignant	V
Présentation	VIII
Comment est construit votre MAT 5150	X
Attentes de fin de cours	XII

## 01. PROGRAMMATION LINÉAIRE

Mise en situation:	
<b>LA DEMANDE D'EMPLOI</b>	<b>2</b>
<b>1.1.</b> Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues	<b>4</b>
<b>1.2.</b> Résolution et représentation graphique d'inéquations du premier degré à deux variables	<b>17</b>
<b>1.3.</b> Systèmes d'inéquations du premier degré à deux variables	<b>25</b>
<b>1.4.</b> Représentation algébrique et graphique des contraintes	<b>34</b>
<b>1.5.</b> Analyse des sommets d'un polygone de contraintes Pour en savoir un peu plus...: La droite baladeuse	<b>47</b> <b>60</b>
<b>1.6. Vue d'ensemble: synthèse des savoirs</b>	<b>61</b>
Consolidation des savoirs	<b>62</b>
<b>1.7.</b> Situations de vie	<b>68</b>
<b>Situations d'évaluation de fin de chapitre SÉ</b>	<b>92</b>
Évaluation des connaissances	<b>93</b>
Évaluation des compétences	<b>95</b>

## 02. LES GRAPHES

Mise en situation:	
<b>L'HÔPITAL VÉTÉRINAIRE JUNGLE OUVERTE</b>	<b>98</b>
<b>2.1.</b> Les composantes d'un graphe	<b>100</b>
<b>2.2.</b> Les différents types de graphes Amusons-nous: Les poignées de main	<b>108</b> <b>115</b>
<b>2.3.</b> Chaînes et cycles eulériens En remontant le cours des siècles: Leonhard Euler et les sept ponts de Königsberg	<b>116</b> <b>122</b>
<b>2.4.</b> Chaînes et cycles hamiltoniens En remontant le cours des siècles: William Rowan Hamilton (1805–1865)	<b>123</b> <b>128</b>
<b>2.5.</b> Chaîne la plus courte	<b>129</b>
<b>2.6.</b> Arbre de valeur minimale ou maximale	<b>137</b>
<b>2.7.</b> Nombre chromatique	<b>146</b>
<b>2.8.</b> Chemin critique de valeur maximale	<b>154</b>
<b>2.9. Vue d'ensemble: synthèse des savoirs</b>	<b>161</b>
Consolidation des savoirs	<b>164</b>
<b>2.10.</b> Situations de vie	<b>171</b>
<b>Situations d'évaluation de fin de chapitre SÉ</b>	<b>184</b>
Évaluation des connaissances	<b>185</b>
Évaluation des compétences	<b>187</b>



**03. OPTIMISATION SPATIALE**

Mise en situation :

***DES CAGES SUR MESURE*** **190****3.1.** Loi des cosinus **192****3.2.** Polygone régulier **204****3.3.** Polygones isométriques, semblables, équivalents **211****3.4.** Solides isométriques, semblables, équivalents **221****3.5. Vue d'ensemble: synthèse des savoirs** **236**Consolidation des savoirs **238****3.6.** Situations de vie **243****Situations d'évaluation de fin de chapitre SÉ** **254**Évaluation des connaissances **255**Évaluation des compétences **257****Prêt pour l'évaluation de fin de module ?** **261**Révision des connaissances **261**Révision des compétences **275**Glossaire des termes mathématiques **287**Corrigé **293**Index **366****Annexe 1: Aire des figures planes** **370****Annexe 2: Aire latérale, aire totale et volume des solides** **371****Annexe 3: Énoncés** **372**À propos de l'illustrateur et des illustrations... **373****Nos petits plus...**Amusons-nous **115**En remontant le cours des siècles **122, 128**Pour en savoir un peu plus... **60**

## OPTIMISATION EN CONTEXTE GÉNÉRAL

Le module MAT 5150, intitulé **Optimisation en contexte général**, touche à une grande famille de situations d'apprentissage: *Recherche de solutions optimales*.

Cette famille regroupe les situations qui comportent un problème devant en partie être traité par l'optimisation, à l'aide de la programmation linéaire, de la théorie des graphes ou de la recherche de mesures. Le module **Optimisation en contexte général** vous fournira l'occasion de poser des actions en vue de vous rendre apte à maximiser un profit, un procédé, un nombre d'objets ou de personnes, un espace ou encore à minimiser des coûts ou des pertes.

En traitant les situations-problèmes proposés dans ce cours, vous serez amené, entre autres, à faire la liste des savoirs mathématiques en matière de théorie des graphes, dans le cas d'un problème lié à la recherche du chemin optimal, à surligner de façon intuitive les arêtes qui pourraient représenter ce chemin lorsque vous cherchez le chemin optimal dans un graphe ou un arbre, ou encore à revenir sur l'énoncé du problème de départ afin de vérifier si la solution cherchée est en étroite corrélation avec les sommets ou la frontière du polygone de contraintes. Dans un contexte géométrique, vous devrez différencier les divers types de figures en vérifiant si les règles et les codes mathématiques ont été respectés.

### COMPÉTENCES DISCIPLINAIRES

Pour résoudre les situations-problèmes de ce cours, vous aurez recours aux trois compétences disciplinaires, soit:

- Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes;
- Déployer un raisonnement mathématique;
- Communiquer à l'aide du langage mathématique.

### COMPÉTENCES TRANSVERSALES

Plusieurs compétences transversales peuvent contribuer au traitement de situations de la famille *Recherche de solutions optimales*. Le programme d'études en propose deux qui apparaissent les plus appropriées pour ce cours:

- Compétence de l'ordre de la communication:** *Communiquer de façon appropriée;*
- Compétence d'ordre intellectuel:** *Exercer son jugement critique.*

### CONTENU DISCIPLINAIRE

Dans ce cours, vous réactiverez et approfondirez l'ensemble des savoirs arithmétiques et algébriques acquis précédemment. Ces savoirs sont sollicités pour la prise en compte de contraintes à respecter dans des contextes d'optimisation. Afin de traiter efficacement les situations-problèmes, vous complèterez votre formation en vous appropriant les savoirs propres à ce cours.

### Savoirs prescrits

En vue de traiter efficacement les situations d'apprentissage proposées dans ce cours, vous développerez trois **procédés intégrateurs**:

- L'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire;
- L'optimisation d'une situation à l'aide de la théorie des graphes;
- L'optimisation spatiale dans un concept de conception et d'utilisation d'objets tridimensionnels.

**SAVOIRS MATHÉMATIQUES****Expressions algébriques**

SM-1 Résolution d'inéquations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables

Tous les savoirs mathématiques : SM. On le reconnaît à ce picto associé aux Outils mathématiques.

**Optimisation linéaire**

SM-2 Résolution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables

SM-3 Représentation des contraintes et de la fonction à optimiser

(fonction objectif ou économique)

SM-4 Détermination et interprétation des sommets et de la région-solution (fermée ou non)

SM-5 Modification des conditions de la situation pour la rendre plus efficiente

**Graphe**

SM-6 Représentation et modélisation d'une situation à l'aide d'un graphe

SM-7 Comparaison de différents graphes

SM-8 Recherche de chaînes ou de cycles eulériens et hamiltoniens, d'un chemin critique, de la chaîne la plus courte, d'un arbre de valeur minimale ou maximale ou encore du nombre chromatique

**Recherche de mesures**

SM-9 Figures équivalentes

SM-10 Détermination de mesures de positions, d'angles, de longueurs, d'aires, de volumes

SM-11 Relations dans le triangle

Comment est construit votre module.  
Vous retrouverez des pages +détaillées un peu +loin à cet extrait.



## OPTIMISATION EN CONTEXTE GÉNÉRAL

## PRÉSENTATION

Présentation des *compétences disciplinaires*, des *compétences transversales*, et du contenu disciplinaire visés par le MAT 5150. ➔ page VIII

## COMMENT EST CON

Les deux pages

Votre MAT 5150 est divisé en chapitres :

## 01

## PROGRAMMATION LINÉAIRE

En début de chapitre une *mise en situation*, ici : **LA DEMANDE D'EMPLOI**.

Elle est tirée de la vie courante réelle ou virtuelle, et illustre l'utilité de la matière qui sera abordée.

**DANS CE CHAPITRE**, vous dit ce que vous verrez comme nouvelles notions, à quoi cela sert en mathématique et dans la vie de tous les jours. ➔ page 2

Les chapitres de votre MAT 5150 sont divisés en sections :

## 1.1. Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues



Au début de chaque section : les **Outils mathématiques** nécessaires à l'acquisition des *savoirs mathématiques*. Présentation succincte, niveau de langue simple, exemples concrets, illustrations au besoin.

➔ page 4 et suivantes

## 1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

Un résumé des *savoirs mathématiques* est présenté sous forme de tableau. Il est suivi de *consolidations des savoirs* pour vous aider à maîtriser les nouveaux *savoirs mathématiques*.

➔ page 61 et suivantes

En conclusion du chapitre, des

## 1.7. Situations de vie

font un *retour sur la mise en situation du début*, laquelle peut maintenant être résolue grâce aux savoirs et compétences acquis dans ce chapitre.

➔ page 68

## MAT 5150

## PRÊT POUR L'ÉVALUATION DE FIN DE MODULE ?

## PREMIÈRE PARTIE Révision des connaissances

Banque de questions portant chacune sur l'un des *savoirs mathématiques* du module.

## DEUXIÈME PARTIE Révision des compétences

Banque de *situations-problèmes* permettant de vérifier l'acquisition de toutes les compétences liées à ce module.

➔ page 261

## MAT 5150 GLOSSAIRE DES TERMES MATHÉMATIQUES

Un mini-dictionnaire : tous les termes apparaissant en **italique rouge gras** dans le module. ➔ page 287

## Et des petits plus....

## Amusons-nous

Les mathématiques, un divertissement ? Eh oui... on peut aussi s'amuser en faisant des mathématiques.

➔ page 115

## En remontant le cours des siècles

XVIII<sup>e</sup>

Un peu d'histoire pour mieux comprendre les mathématiques.

➔ page 122

## ATTENTES DE FIN DE COURS

MAT 5150

Pour savoir où vous allez: la liste des *critères d'évaluation* de ce cours.

➔ page XII

## Si on appliquait cette théorie?

Ensuite, des cas concrets en relation avec les *savoirs mathématiques* que vous avez découverts dans les **Outils mathématiques**.

➔ page 9 et suivantes

## Activités d'apprentissage

Puis, de la pratique, pour vous aider à acquérir par étapes la ou les *compétences disciplinaires* à atteindre. Vous pouvez facilement repérer ces *activités d'apprentissage* grâce à la bande gris pâle sur la tranche du module.

➔ page 13 et suivantes

## UN PEU DE PRATIQUE

## Situations-problèmes

## UN PEU PLUS DE PRATIQUE

Viennent ensuite des situations plus globales et plus complexes, les *situations-problèmes* qui vous amèneront à maîtriser les *compétences transversales* visées par le MAT 5150. Ces situations se repèrent grâce à la bande gris foncé sur la tranche du module.

➔ page 75 et suivantes

## Situations d'évaluation de fin de chapitre

### PREMIÈRE PARTIE

Évaluation des connaissances

### DEUXIÈME PARTIE

Évaluation des compétences

Ces *SÉ* se trouvent à la fin de chaque chapitre. Elles sont signalées par une bande rouge à rayures blanches sur la tranche. Elles sont en deux parties: la première vous permet de vérifier l'acquisition des connaissances, ou *savoirs mathématiques*; la seconde, l'acquisition des *compétences dites transversales*. ➔ page 92 et suivantes

## Corrigé

Il vous donne les solutions de toutes les *activités d'apprentissage*, des *situations-problèmes* et des *consolidations des savoirs*.

Ce corrigé se repère grâce à la bande rouge sur la tranche du module.

➔ page 293 et suivantes

## MAT 5150

## INDEX

Une table alphabétique des mots-clés et leurs références. ➔ page 366 et suivantes

## En tiré à part pour l'enseignant

- Corrigé des **SÉ de fin de chapitre**
- Corrigé du **Prêt pour l'évaluation de fin de module?**
- Grilles d'évaluation

## Pour en savoir un peu plus...

Pour les curieux... un prolongement des connaissances, et de l'enrichissement.

➔ page 60

Au terme de ce cours, vous serez en mesure de représenter des situations de demi-plans, de graphes valués et orientés ou de figures semblables, isométriques ou équivalentes. Votre production sera juste et claire ; elle sera effectuée dans le respect des règles et des conventions mathématiques. L'optimisation d'une situation à l'aide de systèmes d'inéquations du premier degré ou encore de fonctions d'inférence (graphe) ou encore de calculs impliquant des données géométriques vous permettra de prendre des décisions. De plus, vous utiliserez différents registres de représentation afin de généraliser le comportement à un ensemble de situations.

### CRITÈRES D'ÉVALUATION

- Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes
- Déployer un raisonnement mathématique
- Communiquer à l'aide du langage mathématique\*

#### 1. UTILISER DES STRATÉGIES DE RÉOLUTION DE SITUATIONS-PROBLÈMES

- 1.1 Manifestation, orale ou écrite, de la compréhension de la situation-problème
- 1.2 Mobilisation des stratégies et des savoirs mathématiques appropriés

#### 2. DÉPLOYER UN RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

- 2.1 Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés
- 2.2 Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation
- 2.3 Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente

\* La compétence 3 « Communiquer à l'aide du langage mathématique » ne fait pas l'objet d'une évaluation spécifique au regard de la sanction et de la reconnaissance. Toutefois, puisqu'elle se manifeste nécessairement dans toute activité mathématique, elle a été prise en compte dans les outils d'évaluation élaborés pour aider les enseignants à porter leur jugement.

# OPTIMISATION EN CONTEXTE GÉNÉRAL

Votre MAT 5150  
est divisé en 3 chapitres  
dont voici les titres :



**01. PROGRAMMATION LINÉAIRE**

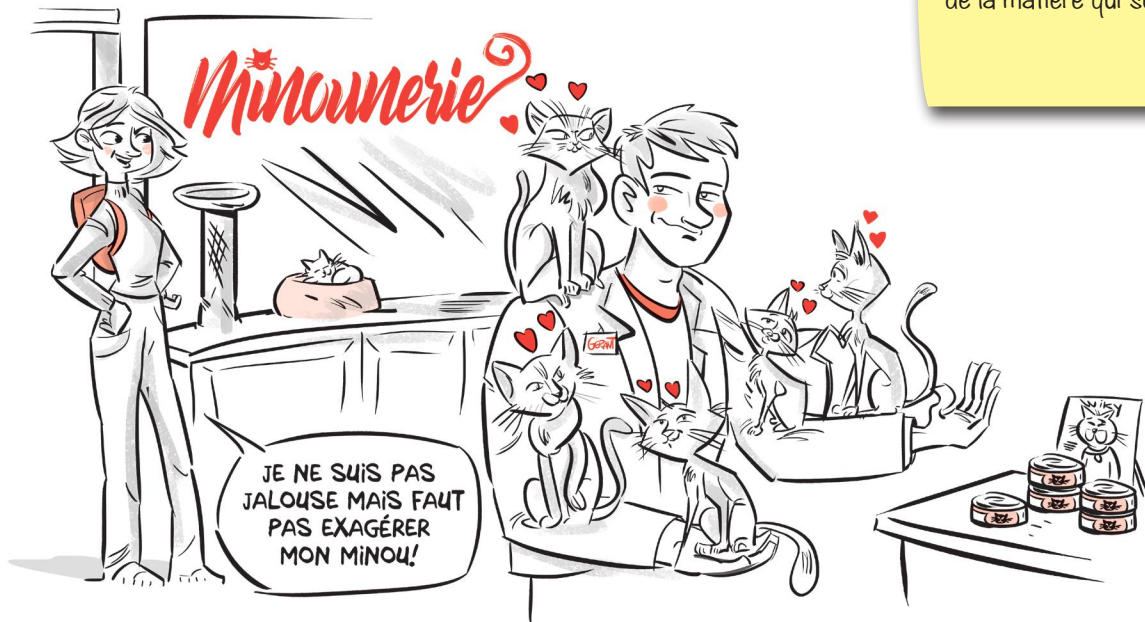
**02. LES GRAPHES**

**03. OPTIMISATION SPATIALE**

Dans ce chapitre, vous serez initié à l'optimisation à l'aide de la programmation linéaire. Vous utiliserez vos connaissances arithmétiques et algébriques dans le but de résoudre des situations-problèmes comportant des contraintes représentant des limites liées à des situations de vie réelles, et qui se traduisent par des inéquations.

### Mise en situation:

## LA DEMANDE D'EMPLOI



En début de chapitre, une mise en situation tirée de la vie courante réelle ou virtuelle qui illustre l'utilité de la matière qui sera abordée.



Vous êtes à la recherche d'un emploi et comme vous adorez les animaux, vous avez répondu à l'annonce:

NOUS SOMMES À LA RECHERCHE D'UN GÉRANT  
POUR UNE ANIMALERIE SPÉCIALISÉE.  
SVP FAIRE PARVENIR VOTRE CV  
À NOUSEMBAUCHONS@LAMINOONERIE.CA

À votre grande surprise, vous avez obtenu le poste: vous voici le nouveau gérant de *La Minounerie*, une animalerie spécialisée dans la vente de chats, de nourriture et d'accessoires pour chats.



Votre poste est temporaire : le gérant actuel doit se rendre au chevet de sa mère malade. Avant son départ, la personne que vous remplacerez vous remet quelques consignes sur les procédures en vigueur à l'animalerie.

Les chats domestiques, c'est-à-dire les chats sans race particulière, se vendent 150 \$, et les chats de race pure, 850 \$.

Pour la sécurité et l'hygiène des animaux, on ne place jamais plus d'un chat dans une cage.

Les clients doivent avoir du choix, il faut donc qu'à tout moment, au moins la moitié des cages soient occupées.

Le nombre de chats domestiques disponibles doit toujours être supérieur ou égal au nombre de chats de race pure, mais jamais plus du double.

Ouf ! Vous vous demandez comment vous pourrez maximiser les profits de *La Minounerie* dans ces conditions.

Vous avez compté un total de 120 cages.

Impossible pour vous de bien gérer l'entreprise sans avoir la liste de prix du fournisseur. Vous profitez de la présence de votre supérieur pour la lui demander. Le coût d'un chat domestique est 80 \$ et celui d'un chat de race pure, 600 \$.

Bien décidé à faire rouler la boutique comme si elle vous appartenait, vous avez décidé de maximiser les profits de *La Minounerie*, mais vous ignorez complètement par où commencer et encore moins comment faire.

Rassurez-vous, les outils présentés dans ce chapitre vous permettent de gérer l'animalerie.

Le bloc *Dans ce chapitre* vous indique les nouvelles notions que vous apprendrez et quelles seront leurs utilités en mathématiques et dans la vie de tous les jours.



#### DANS CE CHAPITRE

##### **Quoi de nouveau ?**

- La programmation linéaire

##### **Qu'est-ce que c'est ?**

- La programmation linéaire est une méthode permettant d'optimiser une fonction linéaire dans une situation soumise à des contraintes qui se traduisent par des inéquations linéaires.

##### **À quoi ça sert en mathématiques ?**

- La programmation linéaire sert à modéliser et à résoudre des situations-problèmes liées à l'optimisation. La programmation linéaire est une branche des mathématiques qui a pour but de trouver la solution qui optimise (maximise ou minimise) une fonction linéaire dans des situations soumises à des contraintes qui se traduisent par des inéquations linéaires.

##### **À quoi ça servira dans la vie ?**

- Optimiser une situation permet de prendre des décisions, que ce soit pour minimiser les coûts ou maximiser les profits, notamment dans la planification et le contrôle de la production et dans divers secteurs d'activités.

## 1.1. Résolution algébrique d'un système à deux inconnues

Chaque chapitre est divisé en sections.



- VOUS CONNAISSEZ TROIS MÉTHODES DE RÉOLUTION ALGÈBRE D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES : COMPARAISON, SUBSTITUTION ET ÉLIMINATION. VOICI UNE OCCASION DE RÉVISER CES TROIS MÉTHODES.



SM-4

Les outils mathématiques nécessaires à l'acquisition des savoirs mathématiques: **SM**.



### Outils mathématiques

#### Méthode de comparaison – Méthode de substitution – Méthode d'élimination

##### 1. Méthode de comparaison

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode de comparaison** consiste à isoler la même variable dans les deux équations et à comparer les deux expressions obtenues pour trouver le couple-solution du système.

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux variables par la **méthode de comparaison**, on suit les étapes suivantes:

On **isole** la même variable dans chacune des équations;

On **compare** les expressions déterminées pour cette variable afin d'obtenir une équation comportant uniquement l'autre variable;

On **résout** l'équation obtenue;

On **calcule** la valeur de l'autre variable en remplaçant la variable déterminée précédemment par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations du système;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations initiales.

#### Exemple

À l'aide de la méthode de comparaison, résoudre le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

On **isole** la même variable dans chacune des équations. Isoler

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{-x + 7}{2} \end{cases}$$

On **compare** les deux expressions obtenues.

Le **y** de la **première équation** = le **y** de la **deuxième équation**

$$-2x + 8 = \frac{-x + 7}{2}$$

Cet outil comprend des exemples, des démarches détaillées et leurs résolutions.





### Outils mathématiques suite

On **résout** l'équation :

$$\begin{aligned}
2(-2x + 8) &= -x + 7 \\
-4x + 16 &= -x + 7 \\
-4x + x &= 7 - 16 \\
-3x &= -9 \\
x &= \frac{-9}{-3} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{3}
\end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de l'autre variable,  $y$ , en substituant à  $x$  la valeur 3 dans l'une ou l'autre des équations obtenues à la première étape :

$$\begin{aligned}
y &= -2x + 8 \\
y &= -2 \cdot \mathbf{3} + 8 \\
y &= -6 + 8 \\
\mathbf{y} &= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-x + 7}{2} \\
y &= \frac{-\mathbf{3} + 7}{2} \\
y &= \frac{4}{2} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

Le couple-solution du système est **(3, 2)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

**Première équation :**

$$\begin{aligned}
2x + y &= 8 \\
2 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 8 \\
6 + \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 8 \\
\mathbf{8} &\stackrel{?}{=} \mathbf{8} \rightarrow \mathbf{Vrai}
\end{aligned}$$

**Deuxième équation :**

$$\begin{aligned}
x + 2y &= 7 \\
\mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 7 \\
3 + 4 &\stackrel{?}{=} 7 \\
\mathbf{7} &\stackrel{?}{=} \mathbf{7} \rightarrow \mathbf{Vrai}
\end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on conclut que le couple **(3, 2)** est bien la **solution** du système d'équations.

### 2. Méthode de substitution

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode de substitution** consiste à isoler une variable dans l'une ou l'autre des équations et à substituer cette expression dans l'autre équation par cette expression, puis à résoudre l'équation.

Pour **résoudre un système** d'équations du premier degré à deux inconnues par la méthode de substitution, on suit les étapes suivantes :

On **isole** une variable dans l'une des deux équations pour obtenir une expression de cette variable ;

On **substitue** à cette même variable dans l'autre équation l'expression obtenue pour former une équation à une variable ;

On **résout** cette équation ;

Tous les termes apparaissant en italique rouge gras se retrouvent au glossaire des termes mathématiques.





### Outils mathématiques suite

On **calcule** la valeur de l'autre variable en remplaçant la variable déterminée précédemment par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations du système ;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans chacune des équations de départ.

#### Exemple

À l'aide de la méthode de substitution, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

On **isole** la variable  $x$  dans la deuxième équation :

$$x + 3y = 2 \quad \rightarrow \quad x = -3y + 2$$

On **substitue** cette expression à la variable  $x$  dans l'autre équation :

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 10 \\ 3(-3y + 2) + 5y &= 10 \end{aligned}$$

On **résout** l'équation :

$$\begin{aligned} -9y + 6 + 5y &= 10 \\ -4y &= 10 - 6 \\ -4y &= 4 \\ y &= \frac{4}{-4} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de la variable  $x$  :

$$\begin{aligned} x &= -3y + 2 \\ x &= -3 \cdot (-1) + 2 \\ x &= 3 + 2 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

Le couple-solution est **(5, -1)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables  $x$  et  $y$  par leur valeur respective dans les équations initiales :

#### Première équation :

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 10 \\ 3 \cdot \mathbf{5} + 5 \cdot (-1) &\stackrel{?}{=} 10 \\ 15 - 5 &\stackrel{?}{=} 10 \\ \mathbf{10} &\stackrel{?}{=} \mathbf{10} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Vrai} \end{aligned}$$

#### Deuxième équation :

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ \mathbf{5} + 3 \cdot (-1) &\stackrel{?}{=} 2 \\ 5 - 3 &\stackrel{?}{=} 2 \\ \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} \mathbf{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Vrai} \end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on conclut que le couple **(5, -1)** est bien la **solution** du système d'équations.



## Outils mathématiques suite

### 3. Méthode d'élimination

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode d'élimination** consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations d'un système, ou deux équations équivalentes, puis à résoudre l'équation restante.

Pour **résoudre un système** d'équations du premier degré à deux variables par la méthode d'élimination, on suit les étapes suivantes :

On **transforme**, s'il y a lieu, les équations sous la forme  $Ax + By = C$ ;

On **exprime**, s'il y a lieu, en nombres entiers les coefficients fractionnaires ou décimaux;

On **choisit** la variable à éliminer;

On **transforme** les équations du système en des équations équivalentes dans lesquelles les coefficients de la variable à éliminer sont opposés;

On **additionne** les deux équations ainsi transformées;

On **résout** l'équation obtenue;

On **substitue** la valeur trouvée à la variable dans l'une ou l'autre des équations, puis on calcule la valeur de l'autre variable;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations d'origine.

#### Exemple

À l'aide de la méthode d'élimination, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 5y = 18 \end{cases}$$

Ici, l'addition des deux équations données n'est pas suffisante pour trouver la solution du système d'équations, car elle ne permet pas l'élimination d'une variable. On doit préalablement multiplier chacune des deux équations par un nombre pour obtenir des coefficients opposés pour l'une des deux variables. On **choisit**, par exemple, d'éliminer la variable  $x$ . On détermine le P.P.C.M. (le plus petit commun multiple) des **coefficients 3 et 2** qui est **6**.

On **transforme** les équations du système en des équations équivalentes dans lesquelles les coefficients de la variable à éliminer sont opposés. On multiplie, par exemple, la première équation par 2 et la seconde par -3 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 & (\times 2) \\ 2x - 5y = 18 & (\times -3) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ -6x + 15y = -54 \\ \hline 19y = -38 \\ y = \frac{-38}{19} \\ \mathbf{y = -2} \end{cases}$$





### Outils mathématiques suite

On substitue à  $y$  la valeur  $-2$  dans l'une ou l'autre des équations d'origine pour calculer la valeur de  $x$ :

$3x + 2y = 8$	ou	$2x - 5y = 18$
$3x + 2 \cdot (-2) = 8$		$2x - 5 \cdot (-2) = 18$
$3x - 4 = 8$		$2x + 10 = 18$
$3x = 8 + 4$		$2x = 18 - 10$
$3x = 12$		$2x = 8$
$x = \frac{12}{3}$		$x = \frac{8}{2}$
<b><math>x = 4</math></b>		<b><math>x = 4</math></b>

Le couple-solution est  **$(4, -2)$** .

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales:

**Première équation :**

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 12 - 4 &\stackrel{?}{=} 8 \\ 8 &\stackrel{?}{=} 8 \rightarrow \text{Vrai} \end{aligned}$$

**Deuxième équation :**

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 18 \\ 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-2) &\stackrel{?}{=} 18 \\ 8 + 10 &\stackrel{?}{=} 18 \\ 18 &\stackrel{?}{=} 18 \rightarrow \text{Vrai} \end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple  **$(4, -2)$**  est bien la **solution** du système d'équations.

## Si on appliquait cette théorie?

- DANS LES EXEMPLES SUIVANTS, VOUS RÉVISEREZ LES TROIS MÉTHODES ALGÈBRIQUES DE RÉOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES.

### Exemple 1

On considère le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$$

Résoudre ce système d'équations par la méthode de

### Solution

On **isole** la même variable dans chacune des équations. Isolons, par exemple, la variable  $y$ :

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - y = 15 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 3x - 15 \end{cases}$$

On **compare** les deux expressions obtenues.

Le  **$y$**  de la **première équation** = le  **$y$**  de la **deuxième équation**

$$-2x + 5 = 3x - 15$$

On **résout** l'équation:

$$\begin{aligned} -2x + 5 &= 3x - 15 \\ -2x - 3x &= -15 - 5 \\ -5x &= -20 \\ x &= \frac{-20}{-5} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de l'autre variable,  $y$ , en substituant à  $x$  la valeur **4** dans l'une ou l'autre des équations obtenues à la première étape:

$$\begin{array}{ll} y = -2x + 5 & \text{ou} & y = 3x - 15 \\ y = -2 \cdot \mathbf{4} + 5 & & y = 3 \cdot \mathbf{4} - 15 \\ y = -8 + 5 & & y = 12 - 15 \\ \mathbf{y} = \mathbf{-3} & & \mathbf{y} = \mathbf{-3} \end{array}$$

Le couple-solution du système est **(4, -3)**.

Des cas concrets en relation avec les savoirs mathématiques. Celui-ci comprend au moins 2 exemples: Le premier est détaillé avec une démarche élaborée.



On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

**Première équation :**

$$\begin{aligned}y &= -2x + 5 \\ -3 &\stackrel{?}{=} -2 \cdot 4 + 5 \\ -3 &\stackrel{?}{=} -8 + 5 \\ -3 &\stackrel{?}{=} -3 \rightarrow \text{Vrai}\end{aligned}$$

**Deuxième équation :**

$$\begin{aligned}3x - y &= 15 \\ 3 \cdot 4 - (-3) &\stackrel{?}{=} 15 \\ 12 + 3 &\stackrel{?}{=} 15 \\ 15 &\stackrel{?}{=} 15 \rightarrow \text{Vrai}\end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(4, -3)** est bien la **solution** du système d'équations.

## Exemple 2

**Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de substitution :**

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2y - x = 11 \end{cases}$$

### Solution

On **isole**, par exemple, la variable  $x$  dans la première équation :

$$x + y = 16 \quad \rightarrow \quad x = -y + 16$$

On **substitue** cette expression à la variable  $x$  dans l'autre équation :

$$\begin{aligned}2y - x &= 11 \\ 2y - (-y + 16) &= 11\end{aligned}$$

On **résout** l'équation :

$$\begin{aligned}2y + y - 16 &= 11 \\ \square y - 16 &= 11 \\ 3y &= 11 + 16 \\ 3y &= \square \\ y &= \frac{27}{3} \\ y &= 9\end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de la variable  $x$  :

$$\begin{aligned}x &= -y + 16 \\ x &= -\square + 16 \\ x &= 7\end{aligned}$$

Le couple-solution est **(7, 9)**.

Le deuxième exemple : à vous de démontrer votre savoir en effectuant la démarche proposée!



On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

**Première équation :**

$$x + y = 16$$

$$7 + \boxed{\phantom{00}} \stackrel{?}{=} 16$$

$$16 \stackrel{?}{=} 16 \rightarrow \text{Vrai}$$

**Deuxième équation :**

$$2y - x = 11$$

$$2 \cdot 9 - \boxed{\phantom{00}} \stackrel{?}{=} 11$$

$$\boxed{\phantom{00}} - 7 \stackrel{?}{=} 11$$

$$11 = 11 \rightarrow \text{Vrai}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(7, 9)** est bien la **solution** du système d'équations.

### Exemple 3

**Résoudre le système d'équations suivant par la méthode d'élimination :**

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 1 - \frac{2y}{3} \\ -1,2y = 6 - 0,4x \end{cases}$$

### Solution

On **transforme** les équations sous la forme  $Ax + By = C$ .

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 1 - \frac{2y}{3} \\ -1,2y = 6 - 0,4x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 1 \\ \boxed{\phantom{00}}x - 1,2y = 6 \end{cases}$$

Troisième exemple:  
Encore + de pratique!



On **exprime** en nombres entiers les coefficients fractionnaires ou décimaux.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 1 \\ 0,4x - 1,2y = 6 \quad (\times 10) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x + 4y}{6} = \frac{6}{6} \\ \boxed{\phantom{00}}x - \boxed{\phantom{00}}y = 60 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x + \boxed{\phantom{00}}y = 6 \\ 4x - 12y = 60 \end{cases}$$

On **choisit** la variable à éliminer. Choisissons ici d'éliminer la variable  $y$ .

On transforme les équations du système en deux équations équivalentes dans lesquelles les **coefficients** de la variable  $y$  sont **opposés**. On multiplie donc la première équation par 3 et la seconde par 1.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \quad (\times 3) \\ 4x - 12y = 60 \quad (\times 1) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\phantom{00}}x + 12y = 18 \\ 4x - \boxed{\phantom{00}}y = 60 \end{cases}$$



On **additionne** les deux équations ainsi transformées.

$$\begin{cases} 9x + 12y = 18 \\ 4x - 12y = 60 \end{cases}$$

---

$$13x = \boxed{\phantom{00}}$$
$$x = \frac{78}{13}$$
$$x = \boxed{\phantom{00}}$$

On **substitue** la valeur 6 à la variable x dans l'une ou l'autre des équations.

$$3x + 4y = 6$$
$$3 \cdot \boxed{\phantom{00}} + 4y = 6$$
$$\boxed{\phantom{00}} + 4y = 6$$
$$4y = 6 - 18$$
$$4y = \boxed{\phantom{00}}$$
$$y = \frac{-12}{4}$$
$$y = \boxed{\phantom{00}}$$

On obtient le couple-solution **(6, -3)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations d'origine.

**Première équation :**

$$\frac{x}{2} = 1 - \frac{2y}{3}$$
$$\frac{6}{2} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{2 \cdot (-3)}{3}$$
$$3 \stackrel{?}{=} 1 - \boxed{\phantom{00}}$$
$$3 \stackrel{?}{=} 3 \rightarrow \text{Vrai}$$

**Deuxième équation :**

$$-1,2y = 6 - 0,4x$$
$$-1,2 \cdot (\boxed{\phantom{00}}) \stackrel{?}{=} 6 - 0,4 \cdot 6$$
$$3,6 \stackrel{?}{=} 6 - \boxed{\phantom{00}}$$
$$3,6 \stackrel{?}{=} 3,6 \rightarrow \text{Vrai}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(6, -3)** est bien la **solution** du système d'équations.

Maintenant que vous avez révisé les trois méthodes algébriques de résolution des systèmes d'équations, il ne vous reste plus qu'à vous exercer dans les **Activités d'apprentissage** que voici.

1. Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode algébrique de votre choix.

$$a) \begin{cases} 2x - 3 = y \\ x - 2y = 9 \end{cases}$$

Des activités d'apprentissage afin de vous pratiquer à acquérir par étapes la ou les compétences disciplinaires.



$$b) \begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases}$$

De l'espace fourni afin de vous faciliter la tâche en écrivant à même le module! Aucune feuille volante!



$$c) \begin{cases} x = 12y + 5 \\ x = 5y + 12 \end{cases}$$

Une mention tout au bas vous indique à quelle page vous trouverez le corrigé afin de vous vérifier.



## 1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

Nous arrivons à la fin du chapitre traitant d'optimisation par programmation linéaire. Avant de vous attaquer aux **Situations-problèmes** plus globales qui vont conclure ce chapitre, voici un résumé des *savoirs mathématiques* que vous avez acquis jusqu'ici.

### Résumé des savoirs mathématiques

#### Résolution d'un système d'équations

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode d'égalité** consiste à isoler la même variable dans les deux équations et à comparer les expressions obtenues pour trouver le couple-solution du système.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode de substitution** consiste à isoler une variable dans l'une ou l'autre des équations du système, puis à substituer cette expression dans l'autre équation par cette expression, puis à résoudre l'équation ainsi obtenue.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode d'élimination** consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations d'un système, ou deux équations équivalentes, puis à résoudre l'équation restante.

#### Représentation graphique de l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables

Un **système d'inéquations du premier degré à deux variables** admet généralement une infinité de solutions qui sont représentées par une région du plan cartésien. Cette région correspond à la région-solution commune à toutes les inéquations du système.

#### Représentation algébrique des contraintes

Les **contraintes** sont des limitations imposées aux variables dans une situation donnée. Ces limitations sont imposées soit par le temps, l'espace, le budget ou simplement par la volonté. Elles se traduisent par un système d'inéquations.

Les expressions « au moins », « pas moins que », « au minimum », « un minimum de », « est supérieur ou égal à », etc. se traduisent par le symbole  $\geq$ .

Les expressions « au plus », « pas plus que », « au maximum », « un maximum de », « est inférieur ou égal à », « est limité à », « ne doit pas dépasser », « ne doit pas excéder », etc. se traduisent par le symbole  $\leq$ .

Les expressions « plus que », « est supérieur à », « dépasse », « excède », etc. se traduisent par le symbole  $>$ .

Les expressions « moins que », « est inférieur à », etc. se traduisent par le symbole  $<$ .

#### Représentation graphique des contraintes

La région-solution de l'ensemble des contraintes d'une situation se nomme le **polygone de contraintes**. L'ensemble de tous les points du polygone de contraintes est l'ensemble-solution du système d'inéquations formé par les contraintes.

#### Fonction objectif

Dans un problème d'optimisation, on appelle **fonction objectif** ou **fonction économique** la **fonction à optimiser**, c'est-à-dire l'expression qu'on cherche à maximiser ou à minimiser.

#### Ajout d'une contrainte à un problème d'optimisation

L'ajout d'une contrainte à un problème d'optimisation peut avoir un effet sur la solution du problème. Pour évaluer l'effet d'une nouvelle contrainte sur la solution d'un problème d'optimisation, on évalue la fonction objectif avant l'ajout de la contrainte en chacun des sommets du polygone de contraintes, puis on évalue de nouveau la fonction objectif avec l'ajout de la contrainte en chacun des sommets du nouveau polygone de contraintes. On compare les deux valeurs optimales ainsi obtenues.

Un résumé des savoirs mathématiques de ce chapitre vous est présenté.



## Consolidation des savoirs

1. Résoudre algébriquement les systèmes d'équations suivants par la méthode de votre choix.

$$\text{a) } \begin{cases} y = 8x - 32 \\ 5x - 20 = y \end{cases}$$

Des consolidations des savoirs vous sont offertes afin de mieux les maîtriser.



$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 5y = 56 \\ y = -6x + 16 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 8y = 19 \\ -4x - 5y = -4 \end{cases}$$

## 1.7. Situations de vie

À votre grande surprise, au début de ce chapitre, vous avez trouvé un emploi comme gérant à La Minounerie. Même si l'emploi est temporaire, vous prendrez tous les moyens à votre disposition pour rentabiliser le commerce et ne pas décevoir le propriétaire qui vous a embauché.

**Retour à la mise en situation :**

### L'OPTIMISATION AU SERVICE DE L'ANIMALERIE



Un retour à la situation de vie qui peut maintenant être résolue grâce aux savoirs et compétences que vous avez acquis jusqu'à présent.

Maintenant que vous avez acquis toutes les connaissances en optimisation et de la programmation linéaire, vous êtes en mesure de déterminer la composition de la population des cages de *La Minounerie* qui maximisera les profits.



#### 1. À *La Minounerie*.

Voici la liste des consignes qu'on vous a données :

Pour tous les chats en magasin, il n'y a que deux prix : 150 \$ pour un chat domestique et 850 \$ pour un chat de race pure.

En tout, il y a 120 cages et il ne doit pas y avoir plus d'un chat par cage.

Au moins la moitié des cages doivent être occupées.

Puisque les chats domestiques sont moins dispendieux et se vendent plus facilement, on doit toujours avoir en magasin au moins autant de chats domestiques que de chats de race pure, mais pas plus de deux fois plus.

Chez le fournisseur, on paye 80 \$ pour un chat domestique et 600 \$ pour un chat de race pure.

## Combien de chats domestiques et de chats de race doit-il y avoir à La Minounerie pour maximiser le profit sur la vente des chats ?

Nous vous suggérons ici une démarche qui vous permettra de trouver la solution d'un problème d'optimisation.

**1<sup>re</sup> étape : Traduction du problème en langage mathématique**, c'est-à-dire :

On **identifie** d'abord les variables ;

On **pose**, sous forme d'inéquation, chacune des contraintes auxquelles doivent obéir les variables ;

On **pose** l'expression de  $Z$ , la fonction objectif.

On **identifie** les variables : les variables  $x$  et  $y$  représentent les valeurs qu'on doit trouver pour procéder à l'optimisation de la fonction  $Z$ , qu'on appelle **fonction objectif** ou **fonction économique**.

$x$ : \_\_\_\_\_

$y$ : \_\_\_\_\_

$Z$ : \_\_\_\_\_

Toujours de l'espace  
fourni afin d'écrire  
vos développements !



Passons maintenant aux contraintes. Dans tout problème d'optimisation, deux contraintes sont toujours présentes ; on les appelle les **contraintes de non-négativité**. Le nombre de chats ne peut en effet être un nombre négatif :

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

En tout, il y a **120 cages** et il ne doit pas y avoir plus d'un chat par cage.

\_\_\_\_\_

**Au moins la moitié** des cages doivent être occupées.

\_\_\_\_\_

Puisque les chats domestiques sont moins dispendieux et se vendent plus facilement, on doit toujours avoir en magasin **au moins autant de chats domestiques que de chats de race pure**, mais **pas plus de deux fois plus**.

\_\_\_\_\_

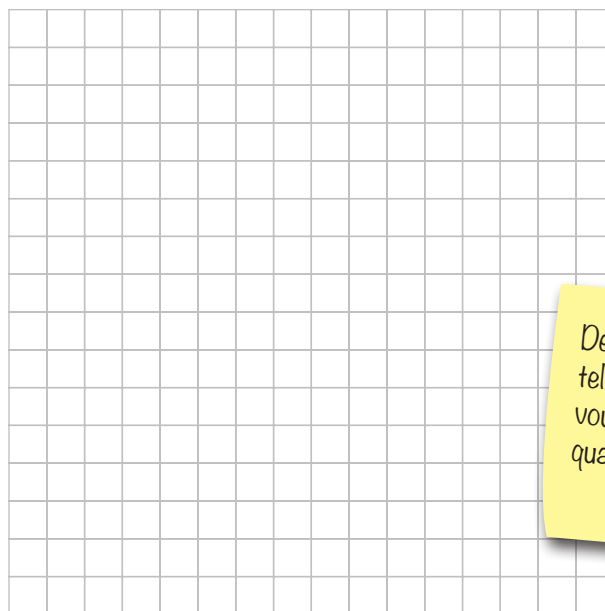
\_\_\_\_\_

On **détermine** l'expression de la fonction objectif, c'est-à-dire la fonction à optimiser. Dans cette situation, le profit est différent selon qu'on vende un chat domestique ou un chat de race pure. Rappelons que le profit est égal au prix de vente moins le prix d'achat :

$$Z = \underline{\hspace{10cm}}$$

**2<sup>e</sup> étape: Analyse graphique des contraintes**, c'est-à-dire :

On **trace** le polygone de contraintes correspondant au système d'inéquations déterminé précédemment :



Des éléments graphiques, tel qu'ici une grille vous évitant les feuilles quadrillées volantes.



On **calcule** ensuite les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.

On peut identifier les quatre sommets du polygone A, B, C et D pour simplifier les notations.

Désignons par A le point de rencontre des droites  $x = y$  et  $x + y = 60$ . Calculez ici les coordonnées du point A :



Désignons par B le point de rencontre des droites  $x = y$  et  $x + y = 120$ . Calculez ici les coordonnées du point B:

Toujours de l'espace pour  
écrire vos développements  
tout au long des étapes!



Désignons par C le point de rencontre des droites  $x = 2y$  et  $x + y = 120$ . Calculez ici les coordonnées du point C:

Désignons par D le point de rencontre des droites  $x = 2y$  et  $x + y = 60$ . Calculez ici les coordonnées du point D:

**3<sup>e</sup> étape: Recherche des valeurs des variables  $x$  et  $y$  qui optimisent la fonction  $Z$ ,** c'est-à-dire:

On **calcule** la valeur de la fonction  $Z$  pour chacun des sommets du polygone de contraintes;

On **choisit** les valeurs des variables  $x$  et  $y$  qui optimisent la fonction  $Z$  de la façon désirée.



## Analyse des sommets du polygone de contraintes

Pour chacun des sommets dont vous avez calculé les coordonnées à l'étape précédente, vous devez évaluer les profits possibles :

Sommet	$Z = 70x + 250y$	Profit
A ( <input type="text"/> , <input type="text"/> )	$Z = 70 \cdot \text{} + 250 \cdot \text{}$	<input type="text"/>
B ( <input type="text"/> , <input type="text"/> )	$Z = 70 \cdot \text{} + 250 \cdot \text{}$	<input type="text"/>
C ( <input type="text"/> , <input type="text"/> )	$Z = 70 \cdot \text{} + 250 \cdot \text{}$	<input type="text"/>
D ( <input type="text"/> , <input type="text"/> )	$Z = 70 \cdot \text{} + 250 \cdot \text{}$	<input type="text"/>

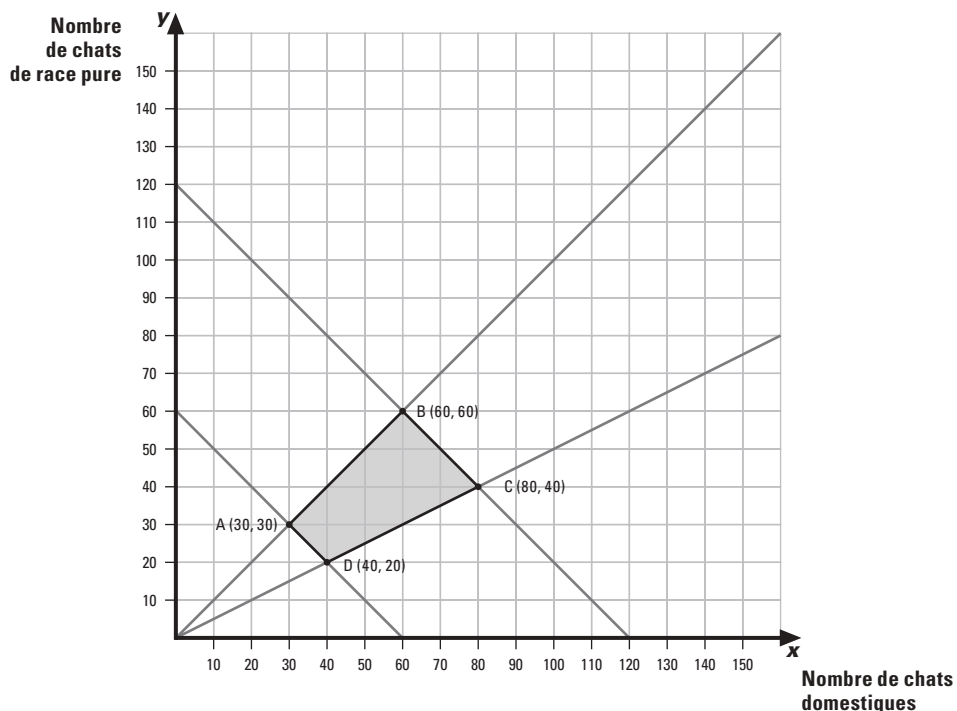
Il ne reste plus qu'à sélectionner la valeur la plus élevée dans la colonne des profits et à énoncer pour quelles valeurs de  $x$  et  $y$  on obtient ce profit maximal.

De l'espace, toujours,  
afin d'y inscrire  
votre réponse!



## 2. L'exposition féline.

Une importante exposition féline se tiendra au cours de la prochaine fin de semaine dans la région. Vous croyez fermement que la vente de chats de race à *La Minounerie* pourrait augmenter en flèche en raison de cet événement. Voici le polygone qui illustre les contraintes auxquelles est soumis le nombre de chats en magasin :



**1. Au Palais du Gourmet.**

Sabrina a récemment réalisé un rêve d'enfance : elle a ouvert un petit café dans un quartier huppé. Elle a appelé son petit commerce *Au Palais du Gourmet*. Sa spécialité est le gâteau au chocolat.



Son gâteau individuel qui est recouvert d'une montagne de crème glacée à la vanille, de sauce au chocolat chaude et d'une grosse cerise juteuse, se vend 8,50 \$ et se mange la plupart du temps sur place.

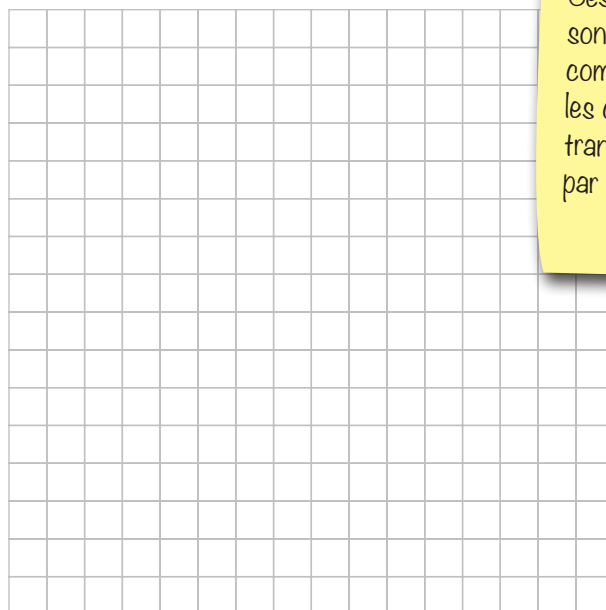
Pour prolonger le plaisir, Sabrina offre à sa clientèle son gros gâteau de type familial à 22 \$.

Sabrina confectionne toujours au moins autant de petits gâteaux que de gros.

Comme Sabrina possède peu de gros moules, elle ne prépare jamais plus de 40 gros gâteaux par jour.

Pour assurer la fraîcheur de ses pâtisseries, elle ne confectionne jamais plus de 100 gâteaux par jour.

**Combien de gâteaux de chaque format Sabrina doit-elle préparer chaque jour pour maximiser le montant de ses ventes ?**



Ces situations-problèmes sont plus globales et plus complexes afin de maîtriser les compétences transversales visées par ce module.



1. SUITE

Des pages complètes vides  
vous permettant d'écrire de  
plus longs développements!



### Avant de continuer et pour conclure cette première étape

Pour terminer ce chapitre, traitant de **l'optimisation par programmation linéaire**, et pour vous assurer de bien maîtriser les notions que vous y avez découvertes, vous traiterez maintenant des **SÉ**. Les solutions de ces situations ne sont pas dans votre module : votre enseignante ou votre enseignant en fera la correction.

Avant d'aborder ces **SÉ**, nous vous recommandons de noter, sur une feuille, les formules, les énoncés, et même des exemples que vous jugez importants. Vous pouvez utiliser cette feuille comme aide-mémoire.

Présentez une solution claire et complète et ne demandez l'aide de personne. Cela vous permettra de vous évaluer, et de connaître les exigences et les attentes de fin d'étape. Ce faisant, vous pourrez, si vous constatez certaines lacunes, les corriger avant de poursuivre.

Cette auto-évaluation vous permettra aussi de savoir si vous répondez aux attentes fixées pour cette étape du MAT 5150, et si vous êtes prêt à aborder la prochaine étape. Étape par étape, vous arriverez à la fin du cours. Avec succès, n'en doutez pas.

Bon travail !

Ces situations d'évaluation se trouvent à la fin de chaque chapitre et sont divisées en 2 parties. Votre enseignant(e) en fera la correction.

## 01 PREMIÈRE PARTIE

### Évaluation des connaissances

#### 1. Déterminer...

Ces situations d'évaluation vous permettent de vérifier l'acquisition des connaissances et des compétences dites transversales.



## 01 DEUXIÈME PARTIE

### Évaluation des compétences

#### 5. L'affectation des tâches.

Marie-Ève...

Félicitations, vous êtes près de la fin, le questionnaire qui suit a été préparé pour vous permettre d'évaluer vos forces et vos faiblesses dans ce module. Le corrigé de ce questionnaire ne se trouve pas dans votre module. Votre enseignant en fera la correction.

La première partie de ce questionnaire porte sur les savoirs mathématiques de ce cours. Dans la deuxième partie de cette rubrique, vous trouverez dix situations-problèmes pour démontrer vos compétences liées à ce module: utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes et déployer un raisonnement mathématique. Bonne révision!

### PREMIÈRE PARTIE

### Révision des connaissances

#### 1. Résoudre...

Cette section est constituée de 2 banques d'exercices dont votre enseignant(e) en fera la correction: ceci dans le but d'évaluer vos forces et vos faiblesses.



### DEUXIÈME PARTIE

### Révision des compétences

Voici enfin le dernier virage avant l'examen: une banque de 10 situations-problèmes portant sur l'optimisation en contexte général. Faites-en bon usage!

#### 1. Les promesses de Martin le malin.

C'est vendredi...

**apothème d'un polygone régulier**

L'apothème d'un polygone régulier est un segment perpendiculaire aux côtés du polygone, qui relie le centre du polygone avec le milieu de ses côtés.

**arbre**

Un arbre est un graphe connexe qui ne comporte aucun cycle simple.

**arc**

On appelle arc une arête dans un graphe orienté.

**arête**

Une arête est un lien entre deux sommets d'un graphe. L'arête est généralement représentée par une ligne droite ou une ligne courbe reliant ces deux sommets.

**boucle**

Une boucle est une arête qui relie un sommet à lui-même dans un graphe.

**chaîne**

Une chaîne est une suite d'arêtes consécutives d'un graphe permettant de passer d'un sommet à un autre.

**chaîne eulérienne**

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui passe une et une seule fois par chacune des arêtes d'un graphe.

**chaîne hamiltonienne**

Une chaîne hamiltonienne est une chaîne qui passe une et une seule fois par chacun des sommets d'un graphe.

**chaîne simple**

Une chaîne simple est une chaîne dont aucune arête ne se répète.

**chemin**

Un chemin est une suite d'arcs dans un graphe orienté.

**chemin critique**

On appelle chemin critique le chemin de valeur maximale entre deux sommets d'un graphe valué et orienté.

**circuit**

Un circuit est un chemin qui commence et se termine au même sommet.



## 1.1. Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues

## 1. p. 13

a) Par substitution:

$$\begin{cases} 2x - 3 = y \\ x - 2y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 9 \\ x - 2(2x - 3) &= 9 \\ x - 4x + 6 &= 9 \\ -3x &= 9 - 6 \end{aligned}$$

$$-3x = 3$$

$$x = \frac{3}{-3}$$

$$x = -1$$

**Le couple-solution est (-1, -5).**

$$2 \cdot (-1) - 3 = y$$

$$-2 - 3 = y$$

$$y = -5$$

b) Par élimination:

$$\begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases} \begin{matrix} (\times 1) \\ (\times -2) \end{matrix} \leftrightarrow \begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ -14x + 12y = -40 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -9x &= -18 \\ x &= \frac{-18}{-9} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 12y &= 22 \\ 5 \cdot 2 - 12y &= 22 \\ 10 - 12y &= 22 \\ -12y &= 22 - 10 \\ -12y &= 12 \\ y &= \frac{12}{-12} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

**Le couple-solution est (2, -1).**

c) Par comparaison:

$$\begin{cases} x = 12y + 5 \\ x = 5y + 12 \end{cases} \rightarrow 12y + 5 = 5y + 12$$

$$12y + 5 = 5y + 12$$

$$12y - 5y = 12 - 5$$

$$7y = 7$$

$$y = \frac{7}{7}$$

$$y = 1$$

**Le couple-solution est (17, 1).**

$$x = 12y + 5$$

$$x = 12 \cdot 1 + 5$$

$$x = 12 + 5$$

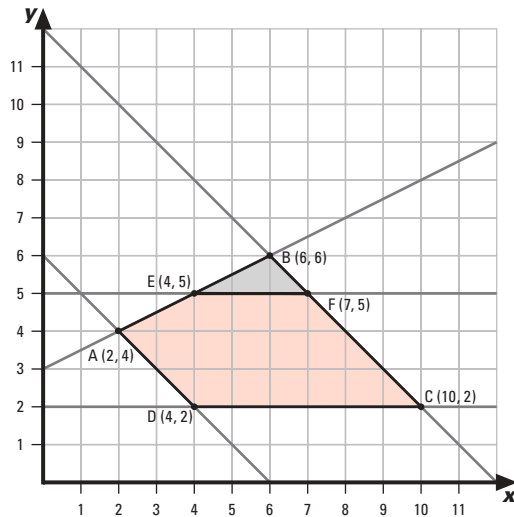
$$x = 17$$

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Activités d'apprentissage.



## 10. p. 57 suite

c) Nouveau polygone de contraintes :



Analyse des sommets du nouveau polygone de contraintes :

Sommet	$Z = 12x + 8y$	Valeur de $Z$
A (2, 4)	$Z = 12 \cdot 2 + 8 \cdot 4$	56
C (10, 2)	$Z = 12 \cdot 10 + 8 \cdot 2$	136
D (4, 2)	$Z = 12 \cdot 4 + 8 \cdot 2$	64
E (4, 5)	$Z = 12 \cdot 4 + 8 \cdot 5$	88
F (7, 5)	$Z = 12 \cdot 7 + 8 \cdot 5$	124

La valeur maximale de  $Z$  est 136.**L'ajout de la contrainte n'a pas d'effet sur la fonction objectif.**

## 1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

## 1. p. 62

a) Par comparaison :

$$\begin{cases} y = 8x - 32 \\ 5x - 20 = y \end{cases} \rightarrow 8x - 32 = 5x - 20$$

$$8x - 32 = 5x - 20$$

$$8x - 5x = -20 + 32$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

**Le couple-solution est (4, 0).**

$$y = 8x - 32$$

$$y = 8 \cdot 4 - 32$$

$$y = 32 - 32$$

$$y = 0$$

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Consolidations des savoirs.



## 1.7. Situations de vie

## 1. À La Minounerie.

p. 68

**Identification des variables :** $x$  : le nombre de chats domestiques $y$  : le nombre de chats de race pure $Z$  : le montant des profits**Traduction des contraintes en inéquations :**

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \leq 120$

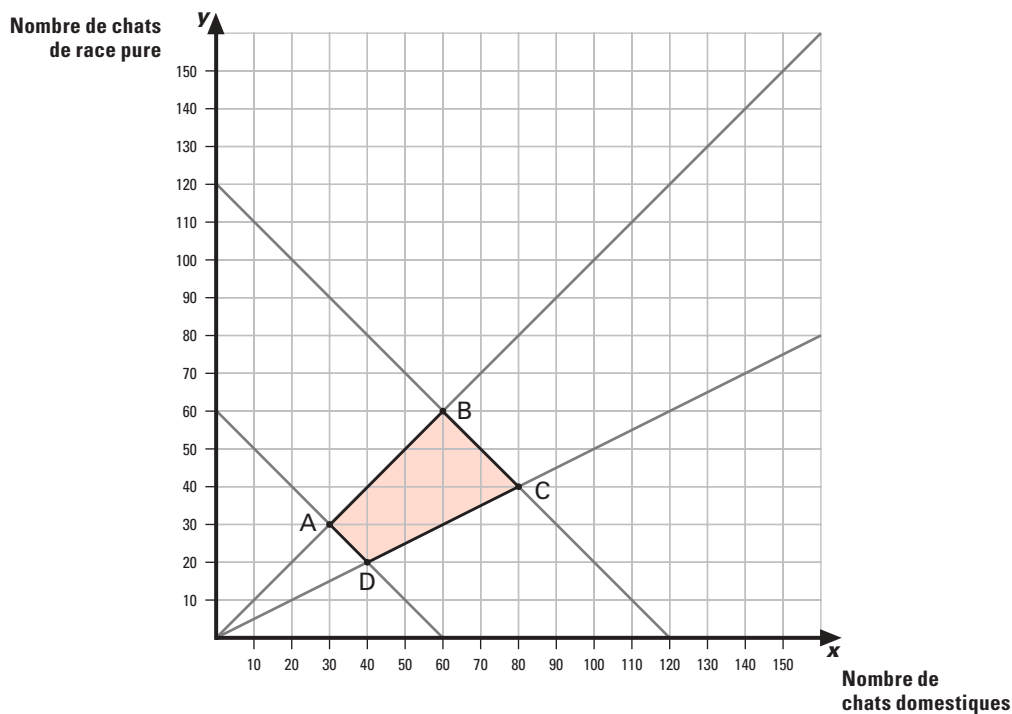
$x + y \geq \frac{1}{2} \cdot 120$  ou  $x + y \geq 60$

$x \geq y$

$x \leq 2y$

**Fonction objectif :**

$Z = (150 - 80)x + (850 - 600)y$  ou  $Z = 70x + 250y$

**Tracé du polygone de contraintes :**

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Situations de vie.

KINÉSIS  
ÉDUCATION

## 1. Au Palais du Gourmet.

p. 75

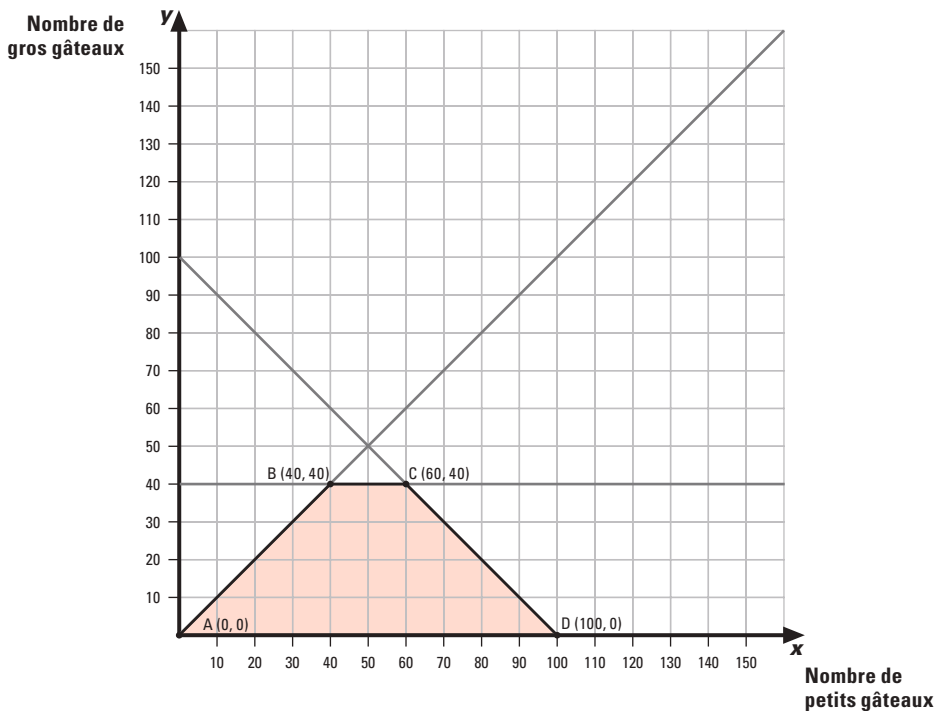
**Identification des variables:**

$x$ : le nombre de petits gâteaux  
 $y$ : le nombre de gros gâteaux  
 $Z$ : le montant des ventes par jour

**Contraintes:**

$x \geq 0$   
 $y \geq 0$   
 $x \geq y$   
 $y \leq 40$   
 $x + y \leq 100$

**Fonction objectif:**  $Z = 8,50x + 22y$

**Polygone de contraintes:****Analyse des sommets du polygone de contraintes:**

Sommet	$Z = 8,50x + 22y$	Montant des ventes
A (0, 0)	$Z = 8,50 \cdot 0 + 22 \cdot 0$	0 \$
B (40, 40)	$Z = 8,50 \cdot 40 + 22 \cdot 40$	1 220 \$
C (60, 40)	$Z = 8,50 \cdot 60 + 22 \cdot 40$	1 390 \$
D (100, 0)	$Z = 8,50 \cdot 100 + 22 \cdot 0$	850 \$

**En confectionnant 60 petits gâteaux et 40 gros gâteaux, le montant des ventes est maximal à 1 390 \$.**

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Situations-problèmes.

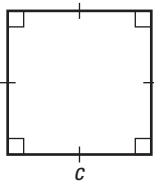
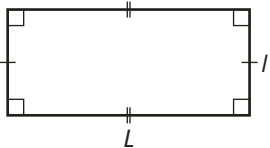
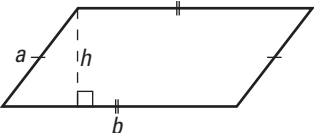
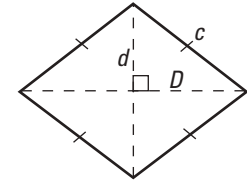
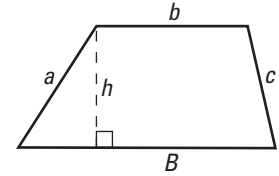
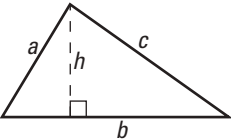
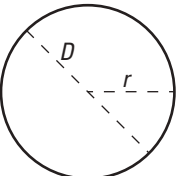


MOTS	CHAPITRE 1	CHAPITRE 2	CHAPITRE 3
Apothème d'un polygone régulier			205, 236
Arbre		108, 110, 111, 112, 137, 138, 140, 142, 161, 162	
Arbre de valeur maximale		140, 162	
Arbre de valeur minimale		137, 162	
Arc		154, 155, 156, 163	
Arête		100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 116, 117, 118, 119, 125, 126, 129, 130, 131, 132, 133, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 146, 147, 154, 161, 162, 163	226, 228
Boucle		101, 105, 108, 161	
Chaîne		102, 103, 104, 105, 106, 109, 111, 116, 117, 118, 123, 124, 125, 126, 129, 130, 131, 132, 133, 154, 161, 162, 163	
Chaîne eulérienne		116, 117, 118, 126, 162	
Chaîne hamiltonienne		123, 124, 125, 126, 162	
Chaîne la plus courte		102, 129, 130, 131, 132, 133, 162	
Chaîne simple		102, 104, 105, 106, 161	
Chemin		132, 154, 155, 156, 157, 163	
Chemin critique		154, 157, 163	
Circuit		154, 155, 156, 163	


Une table alphabétique des mots clés et leurs références.



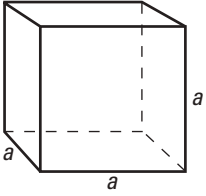
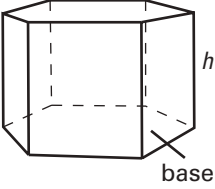
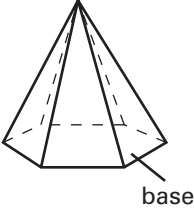
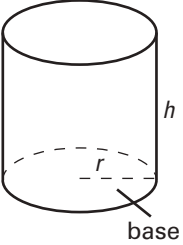
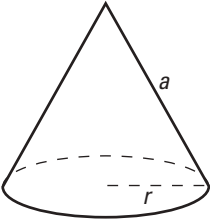
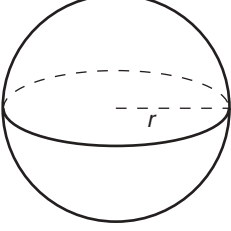
**Annexe 1 : Aire des figures planes**

		<b>Périmètre</b>	<b>Aire</b>
<b>Carré</b>		$P = 4c$	$A = c^2$
<b>Rectangle</b>		$P = 2(L + l)$	$A = Ll$
<b>Parallélogramme</b>		$P = 2(a + b)$	$A = bh$
<b>Losange</b>		$P = 4c$	$A = \frac{D \times d}{2}$
<b>Trapèze</b>		$P = a + b + c + B$	$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$
<b>Triangle</b>		$P = a + b + c$	$A = \frac{b \times h}{2}$ ou $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{a + b + c}{2}$
<b>Cercle</b>		$C = 2\pi r$ ou $C = \pi D$	$A = \pi r^2$

Annexes regroupant les formules.



**Annexe 2: Aire latérale, aire totale et volume des solides**

		<b>Aire latérale</b>	<b>Aire totale</b>	<b>Volume</b>
<b>Cube</b>		$A_l = 4a^2$	$A_t = 6a^2$	$V = a^3$
<b>Prisme</b>		$A_l = P_{\text{base}} \cdot h$ (où $P_{\text{base}}$ est le périmètre de la base du prisme)	$A_t = A_l + 2 A_{\text{base}}$ (où $A_{\text{base}}$ est l'aire de la base du prisme)	$V = A_{\text{base}} \cdot h$
<b>Pyramide</b>		$A_l =$ somme des aires des triangles	$A_t = A_l + A_{\text{base}}$	$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$
<b>Cylindre</b>		$A_l = 2\pi r h$ (où $\pi \approx 3,14$ )	$A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2$ ou $A_t = 2\pi r (h + r)$	$V = A_{\text{base}} \cdot h$
<b>Cône droit</b>		$A_l = \pi r a$	$A_t = \pi r a + \pi r^2$ ou $A_t = \pi r (a + r)$	$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$
<b>Sphère</b>		$A_l = 4\pi r^2$	$A_t = A_l = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

**Annexe 3: Énoncés**

Bien qu'il ait droit à un aide-mémoire, l'adulte doit maîtriser les énoncés suivants qui sont prescrits. Ils peuvent être utilisés dans une preuve ou une démonstration.

En voici la liste:

- E13.** Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.
- E14.** Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
- E15.** Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à  $r + 1$ , où  $r$  est le plus grand degré de ses sommets.
- E16.** De tous les polygones équivalents à  $n$  côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.
- E17.** De deux polygones convexes équivalents, c'est le polygone qui a le plus de côtés qui a le plus petit périmètre. (À la limite, c'est le cercle équivalent qui a le plus petit périmètre.)
- E18.** De tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le cube qui a le plus grand volume.
- E19.** De tous les solides de même aire totale, c'est la boule qui a le plus grand volume.
- E20.** De tous les prismes rectangulaires de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.
- E21.** De tous les solides de même volume, c'est la boule qui a la plus petite aire totale.

Annexe des énoncés prescrits



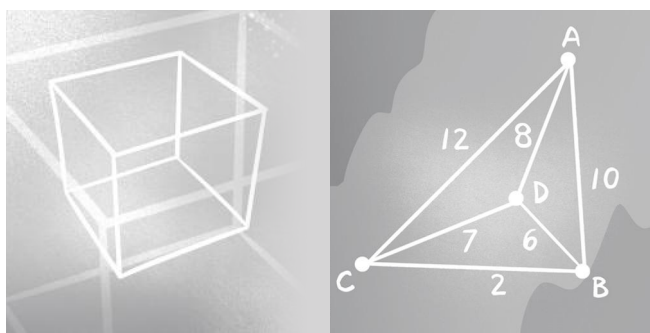


## À propos de l'illustrateur et des illustrations...

Les illustrations des couvertures et les illustrations que vous trouverez au fil des pages de ce module sont des illustrations originales, commandées pour notre collection à Paul Bordeleau, illustrateur québécois, auteur de bandes dessinées et illustrateur-éditorialiste pour l'hebdomadaire *Voir* de 1992 à 2004, et pour le journal *La Presse* en 2001 et 2002. En 2003, il a pris la relève de Garnotte et de Gité comme illustrateur de nos collections.



Une page est consacrée à l'illustrateur afin de vous le présenter.

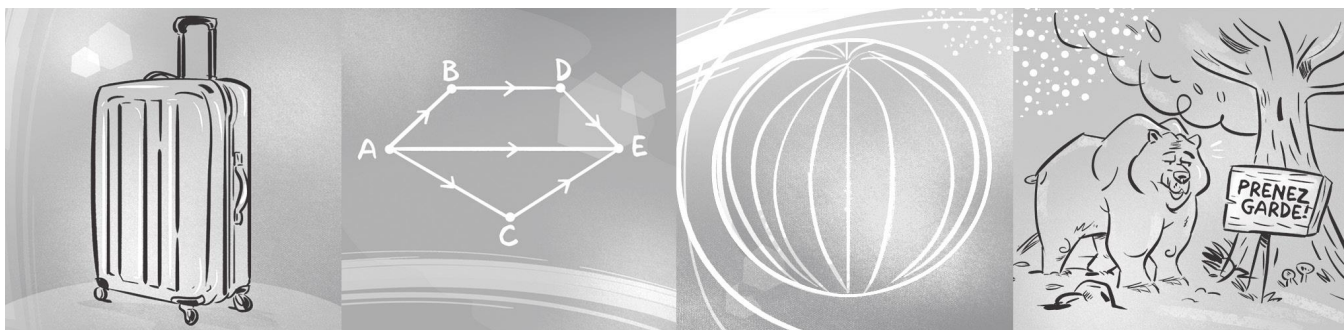


En 2009, il était l'un des bédéistes invités au festival *BoomFest* de Saint-Pétersbourg, en Russie. Il a illustré entre autres le générique de la télésérie *La Galère* à Ici Radio-Canada. En 2016, il a participé au projet *Correspondances* de Lyon.

Dans la collection MAT, ses illustrations sont parfois conçues comme de petites pauses détente au fil des chapitres.

D'autres fois, elles sont des illustrations essentielles à la compréhension et à la résolution des situations qui vous sont présentées.

Dans les pages d'ouverture des chapitres, elles illustrent la situation concrète qui vous amène à vous plonger dans la réalité mathématique des activités d'apprentissage et des situations-problèmes. Ces activités et ces situations vous permettent d'acquérir la maîtrise des savoirs mathématiques visée par le module.



Vous voulez en savoir plus sur Paul Bordeleau ?  
Voici ses coordonnées : [www.paulbordeleau.com](http://www.paulbordeleau.com)

## Pour en savoir un peu plus...

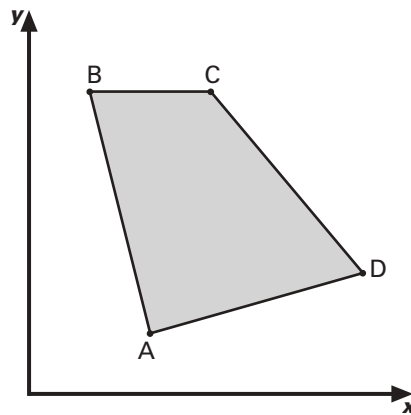
### La droite baladeuse

On peut se servir de ce qu'on appelle la *droite baladeuse* pour trouver le couple  $(x, y)$  qui optimise une situation. Pour ce faire, on doit d'abord représenter le polygone de contraintes, puis se servir d'une droite de pente  $-\frac{A}{B}$ , où  $A$  et  $B$  sont les coefficients de la fonction objectif :

$$Z = Ax + By + C.$$

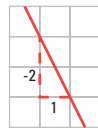
### Exemple

On considère des variables  $x$  et  $y$  soumises aux contraintes représentées par le polygone de contraintes ci-dessous :

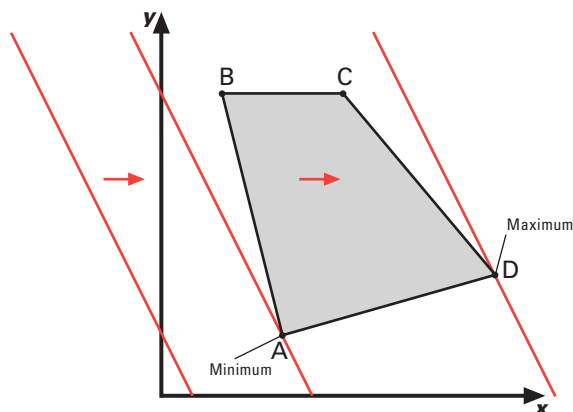


Pour les curieux,  
un prolongement  
des connaissances  
et de l'enrichissement.

La fonction objectif est  $Z = 10x + 5y - 2$ . La pente de la droite est  $-\frac{A}{B}$ , c'est-à-dire  $-\frac{10}{5}$ , soit  $-\frac{2}{1}$ .  
La droite baladeuse a pour pente  $-\frac{2}{1}$  :



À partir de la gauche du graphique, on déplace, vers la droite, une droite de pente  $-2$  jusqu'à ce qu'elle rencontre le premier sommet : c'est le point qui donne lieu au minimum de la fonction objectif. Si l'on poursuit le déplacement de la droite baladeuse vers la droite, on obtient le maximum de la fonction objectif lorsque l'on rencontre le dernier sommet :



**Les poignées de main**

Vous avez été témoin d'une scène où un groupe d'hommes échangent une poignée de main. Vous avez été témoin de 28 poignées de main.

a) Combien y avait-il d'hommes dans ce groupe?

---


b) Combien de poignées de main auraient été échangées si le groupe avait été de 12 hommes?

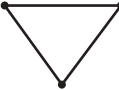
---

On peut s'amuser  
en faisant  
des mathématiques!  
Et son corrigé.

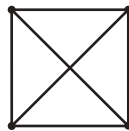
**Amusons-nous / page 115****Les poignées de main**

- a) Le nombre de poignées de main est égal au nombre d'arêtes d'un graphe complet dont le nombre de sommets est égal au nombre de personnes.

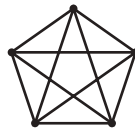
S'il y a 2 personnes, alors il y a 1 poignée de main, car une seule arête relie 2 sommets: 

S'il y a 3 personnes, alors il y a 3 poignées de main, car trois arêtes relient 3 sommets: 

S'il y a 4 personnes, alors il y a 6 poignées de main:



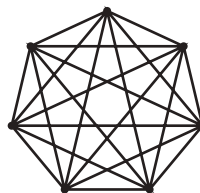
S'il y a 5 personnes, alors il y a 10 poignées de main:



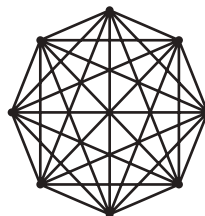
S'il y a 6 personnes, alors il y a 15 poignées de main:



S'il y a 7 personnes, alors il y a 21 poignées de main:



S'il y a 8 personnes, alors il y a 28 poignées de main:



**Il y avait 8 personnes dans le groupe.**

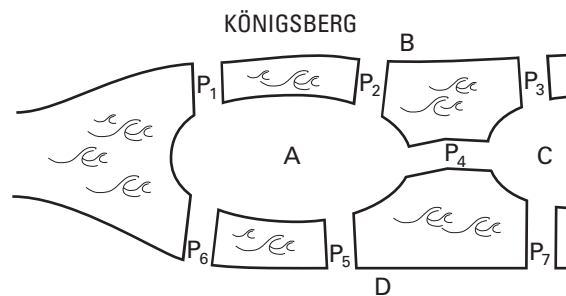
- b) De façon générale, on obtient le nombre de poignées de main en multipliant le nombre de personnes par le nombre de personnes moins 1, et en divisant le résultat par 2. Donc, pour 12 personnes, il y a:  $12 \times 11 \div 2$ , soit 66 poignées de main.

**Vous auriez observé 66 poignées de main.**

### Leonhard Euler et les sept ponts de Königsberg

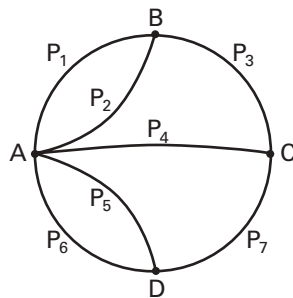
Leonhard Euler (1707-1783) est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Son œuvre est considérable. Euler s'est intéressé principalement à trois domaines fondamentaux à son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires de comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, etc.) et les mathématiques. Il a travaillé plusieurs aspects de cette dernière discipline, de la géométrie différentielle à l'analyse fonctionnelle, en passant par le calcul des variations, des courbes et des surfaces, le calcul des probabilités et les premières formes de la théorie des graphes.

Vers 1735, Euler était à l'emploi de l'Université de Königsberg (maintenant Kaliningrad, en Russie), une ville dont les différentes parties étaient alors reliées par sept ponts. Euler décida un jour de se pencher sur un problème soulevé à l'époque : « Peut-on faire un trajet en passant une et une seule fois par tous les ponts de Königsberg ? »



Un peu d'histoire  
pour mieux comprendre  
les mathématiques.

Le mathématicien analysa la question en schématisant la représentation de la ville et de ses ponts à l'aide d'un graphe. Bien entendu, il trouva la solution de l'énigme : il est impossible de faire un trajet (chaîne) qui passe une et une seule fois par chacun des ponts, car il y a plus de deux sommets du graphe qui sont de degré impair.



Ce problème désormais célèbre des ponts de Königsberg a donné naissance à une nouvelle discipline des mathématiques : la théorie des graphes. Cette théorie fort utile est appliquée de nos jours dans de nombreux domaines : gestion des réseaux de distribution, trafic routier, affectation des ressources, conception de circuits électroniques...

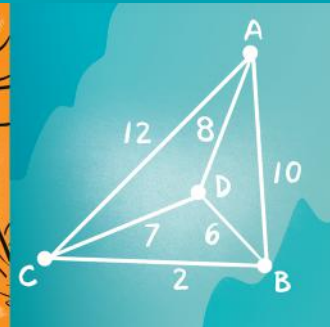
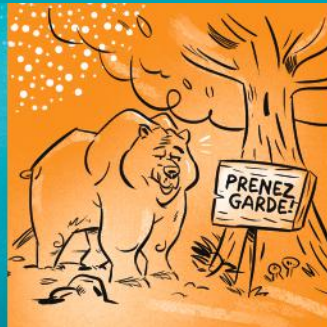
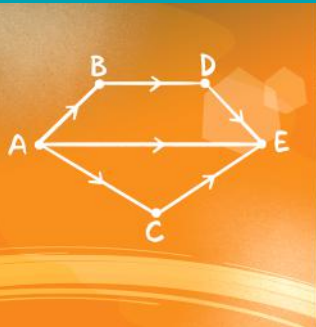
## Le MAT 5150

Vise l'acquisition de deux grandes compétences transversales: communiquer de façon appropriée et exercer son jugement critique. Au moyen de trois procédés intégrateurs: l'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire, l'optimisation d'une situation à l'aide de la théorie des graphes et l'optimisation spatiale dans un contexte de conception ou d'utilisation d'objets tridimensionnels.

ÉDITION  
FÉVRIER  
2024

# MAT A<sub>CST</sub> 5150 2

## FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE



Notre maison n'a qu'une seule et unique raison d'être depuis sa création il y a plus d'un demi-siècle: publier des ouvrages de qualité irréprochable, de bonne tenue, aux contenus solides, privilégiant des démarches en accord avec les principes des différentes approches pédagogiques, et libres de tout compromis de caractère purement commercial.

ISBN 978-2-7615-0761-5



401 1581

Florence Grandchamp  
Drita Neziri  
Abdelkader Amara  
Raymond Thériault

ÉDITION  
FÉVRIER  
2024

## OPTIMISATION EN CONTEXTE GÉNÉRAL

**MAT**  
**A** CST  
**5150 2**

**FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE**

Ce document est disponible  
gratuitement pour  
l'enseignant(e). Il suffit  
d'en faire la demande  
à [editions@ebbp.ca](mailto:editions@ebbp.ca)

 KINESIS  
EDUCATION

## TIRÉ À PART

Corrigé des *Situations d'évaluation de fin de chapitre*

Grilles d'évaluation

Corrigé du *Prêt pour l'évaluation de fin de module?*

 KINESIS  
EDUCATION

L'éditeur permet la reproduction  
de ce document.