Florence Grandchamp
Drita Neziri
Abdelkader Amara
Raymond Thériault

OPTIMISATION EN CONTEXTE APPLIQUÉ

MAT TS 5160 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

KINĒSIS ÉDUCATION

Graphismes, notations et symboles utilisés dans ce module

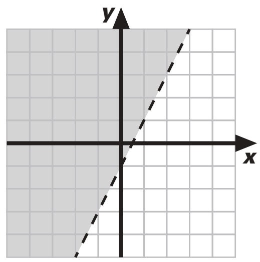
KINESIS ÉDUCATION

Graphismes, notations et symboles

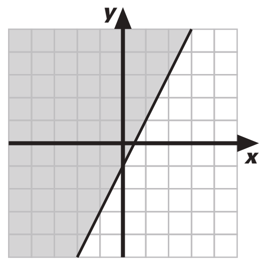
(20, 80)	couple de coordonnées 20 et 80
$<$	est plus petit que, est inférieur à
$\leq$	est plus petit ou égal à, est inférieur ou égal à
$>$	est plus grand que, est supérieur à
$\geq$	est plus grand ou égal à, est supérieur ou égal à
Z	fonction objectif ou économique

Rappel de quelques notions

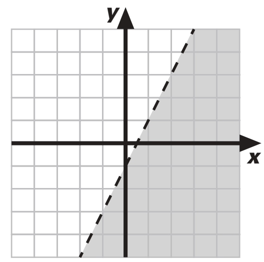
Représentation graphique d'une inéquation



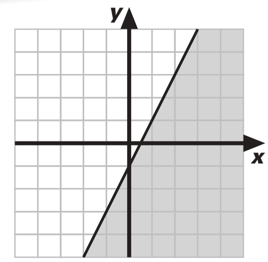
$y > 2x - 1$



$y \geq 2x - 1$



$y < 2x - 1$



$y \leq 2x - 1$

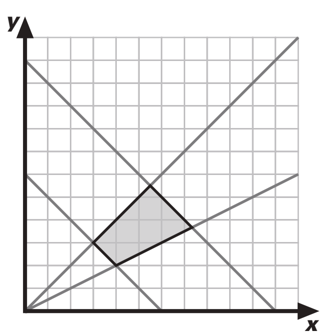
Contrainte

Inéquation du type $Ax + By + C > 0$ ou $Ax + By + C < 0$ ou $Ax + By + C \geq 0$ ou $Ax + By + C \leq 0$ représentant une condition restrictive par rapport aux données d'un problème d'optimisation.

Fonction objectif ou économique

Expression de la forme $Z = Ax + By + C$ dont on recherche la valeur minimale ou la valeur maximale.

Polygone de contraintes



Région du plan cartésien formée par l'intersection des représentations graphiques de chacune des contraintes d'un problème d'optimisation.

Sommets d'un polygone de contraintes

Intersections des droites formant les limites du polygone. On calcule algébriquement les coordonnées d'un sommet en résolvant le système de deux équations associées aux droites qui se croisent en ce sommet.

Solution d'un problème d'optimisation

Coordonnées d'un sommet du polygone de contraintes qui donnent la valeur maximale ou minimale de la fonction objectif.

OPTIMISATION
EN CONTEXTE APPLIQUÉ

Conforme au Programme

KINESIS ÉDUCATION

MAT

TS

5160 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

NE ME JETEZ PAS !

GARDEZ-MOI
COMME AIDE-MÉMOIRE

Car « *la mémoire est une faculté qui oublie* »
… en maths comme en toutes choses.

CE LIVRE APPARTIENT À : ______________________

La collection

MAT

Tous les titres
de la collection MAT
au catalogue

KINÉSIS ÉDUCATION

FORMATION DE BASE COMMUNE :

Présecondaire

MAT P101 4	MAT P102 3	MAT P103 2	MAT P104 4

Secondaire 1		**Secondaire 2**	
MAT 1101 3	MAT 1102 3	MAT 2101 3	MAT 2102 3

Mise À Niveau

MAN P100	MAN 1100	MAN 2100

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE :

Secondaire 3

MAT 3051 2	MAT 3052 2	MAT 3053 2

Secondaire 4

CST	MAT 4151 1	MAT 4152 1	MAT 4153 2
TS	MAT 4261 2	MAT 4262 2	MAT 4263 2
SN	MAT 4271 2	MAT 4272 2	MAT 4273 2

Secondaire 5

CST	MAT 5150 2	MAT 5151 1	MAT 5152 1
TS	**MAT 5160 2**	MAT 5161 2	MAT 5163 2
SN	MAT 5170 2	MAT 5171 2	MAT 5173 2

FORMATION À DISTANCE :

Secondaire 1, 2 et 3

Tous les guides d'apprentissage du secondaire 1, 2 et 3 ont été adaptés pour les besoins de la formation à distance. Pour en savoir plus : voyez notre site *www.ebbp.ca*

Secondaire 4 et 5 — *En préparation*

Ouvrages déjà parus au catalogue :

MAT 1005 2	MAT 1006 2	MAT 1007 2	MAT 2006 2	MAT 2007 2	MAT 2008 2
MAT 3015 2	MAT 3016 2	MAT 3017 2			
MAT 4101 2	MAT 4102 1	MAT 4103 1	MAT 4104 2	MAT 4105 1	MAT 4106 1
MAT 4107 1	MAT 4108 1	MAT 4109 1	MAT 4110 1	MAT 4111 2	
MAT 5101 1	MAT 5102 1	MAT 5103 1	MAT 5104 1	MAT 5105 1	MAT 5106 1
MAT 5107 2	MAT 5108 2	MAT 5109 1	MAT 5110 1	MAT 5111 2	MAT 5112 1
MAN 1000	MAN 2000	MAN 3000		MAT 1005 FAD à MAT 5112 FAD	

Florence Grandchamp
Drita Neziri
Abdelkader Amara
Raymond Thériault

OPTIMISATION EN CONTEXTE APPLIQUÉ

MAT TS 5160 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

K/E KINĒSIS ĒDUCATION

Première édition 2022 MAT 5160 2

Canada L’ensemble des titres admissibles de notre production bénéficie du soutien financier du gouvernement du Canada.

Communication et pédagogie	Christiane Beullac
Composition et index	Audrey d’Amboise Francisca Martinez Galvez Valérie Tardif
Conseiller en mathématiques	Raymond Thériault
Correction	Jonathan Crête
Direction de la collection	
• contenu éditorial	Célestin de La Grange Annie Lopez
• contenu mathématique	Florence Grandchamp
• infographie et production	Francine Plante
Idéatrice	Marianne Delaroche
Illustrations	Paul Bordeleau
Informatique éditoriale	Francisca Martinez Galvez
Maquette de la couverture	Jean-Sébastien Lajeunesse Michel Lajeunesse
Maquette de l’ouvrage	Célestin de La Grange Francine Plante
Réécriture	Jonathan Crête
Révision mathématique	Sylvain Gervais

Impression	Sprintmédia

Éditrice déléguée	Francine Plante / Les Éditions Jules Châtelain

Page des crédits

KINÉSIS ÉDUCATION

Pour en savoir plus sur l’illustrateur et sur les illustrations de votre module, voir p. 165

Dépôt légal — Bibliothèque et Archives nationales du Québec, Bibliothèque et Archives Canada, 2022.
ISBN 978-2-7615-0770-7

À L'ÉTUDIANT ET À L'ENSEIGNANT POUR CETTE PREMIÈRE ÉDITION 2022

Vous avez en main la première édition du module MAT 5160, seizième module de notre collection MAT FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE.

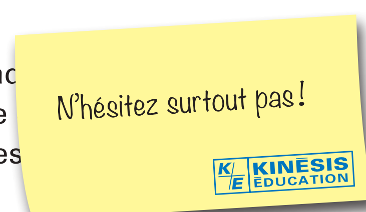
Les auteurs, les correcteurs, les réviseurs et toute l'équipe éditoriale et technique ont fait de leur mieux pour que cet ouvrage respecte l'esprit et la lettre du programme, et réponde à vos attentes et à vos besoins. Mais nul, ni rien, n'est parfait sur terre : moins que quiconque, nous prétendons avoir atteint la perfection, même après révision et correction.

Les auteurs et l'éditeur demandent aux utilisateurs — étudiants et enseignants — de leur faire part de leurs commentaires et de leurs suggestions le plus tôt possible pour que nous puissions dès la prochaine impression apporter les retouches, les modifications ou les ajouts qui se révéleraient nécessaires.

D'autre part, n'hésitez pas à nous signaler coquilles ou erreurs si vous en trouvez : **nous ne procédons jamais à une réimpression sans avoir d'abord effectué les corrections ou les retouches nécessaires.** Un ouvrage didactique n'est pas une œuvre immuable, au contraire, c'est un outil perfectible et en perpétuel devenir.

Avec la collaboration de toutes et de tous, nous pourrons ensemble améliorer et raffiner, au fil des ans, un document dont nous voudrions qu'il soit pour vous l'outil rêvé. Nous ferons tout pour qu'il le devienne.

Écrivez-nous, téléphonez-nous, ou adressez-nous un courriel à l'ac
cbeullac@ebbp.ca, la responsable des communications et notre
Nous accusons toujours réception de la correspondance reçue des
Vous pouvez aussi nous visiter sur le site www.ebbp.ca.



Depuis plus de soixante-cinq ans, nous n'avons jamais cessé de travailler en étroite collaboration avec le monde de l'enseignement, et nous voulons continuer de le faire : que vous soyez étudiant ou enseignant, merci de garder le contact avec nous par le moyen qui vous est le plus commode : téléphone, télécopieur, courriel.

L'éditeur

KINÉSIS ÉDUCATION
Bureau 275, 4823, rue Sherbrooke Ouest, Westmount, Québec H3Z 1G7
Téléphone : 514 932-9466 Télécopieur : 514 932-5929
Courriel : cbeullac@ebbp.ca Site : www.ebbp.ca

Table des matières
de votre volume

KINESIS ÉDUCATION

01. PROGRAMMATION LINÉAIRE

Nos petits plus...

Le module MAT 5160, intitulé ***Optimisation en contexte appliqué***, touc
d'une grande famille de situations d'apprentissage : *Recherche de solution optimales*.
Cette famille regroupe les situations qui comportent un problème pouvant être traité en partie par l'optimisation à l'aide de la programmation linéaire. Le module ***Optimisation en contexte appliqué*** vous fournira l'occasion de poser des actions en vue de vous rendre apte à maximiser un profit, un procédé, un nombre d'objets ou de personnes, ou encore à minimiser des coûts ou des pertes.

En traitant les situations-problèmes de ce module, vous serez amené, entre autres, à cerner le lien entre les expressions littérales et les symboles d'inéquation lorsque vous illustrez votre propos par des exemples de nombres, à déterminer les demi-plans qui représentent les contraintes et leur impact sur la fonction économique ou encore, à déduire certaines valeurs des points d'intersection des droites frontières, par simple substitution.

COMPÉTENCES DISCIPLINAIRES

Pour résoudre les situations-problèmes proposées, vous aurez recours aux trois compétences disciplinaires, soit :

Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes ;

Déployer un raisonnement mathématique ;

Communiquer à l'aide du langage mathématique.

COMPÉTENCES TRANSVERSALES

Plusieurs compétences transversales peuvent contribuer au traitement de situations de la famille *Recherche de solutions optimales*. Le programme d'études en propose deux qui apparaissent les plus appropriées pour ce cours :

Compétence d'ordre social : *Actualiser son potentiel ;*

Compétence d'ordre méthodologique : *Se donner des méthodes de travail efficaces.*

CONTENU DISCIPLINAIRE

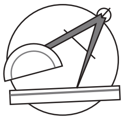
Dans ce cours, vous réactiverez et approfondirez un ensemble de savoirs arithmétiques et algébriques acquis précédemment. Afin de traiter efficacement les situations-problèmes, vous compléterez votre formation en vous appropriant les savoirs propres à ce cours.

Savoirs prescrits

Afin de traiter efficacement les situations d'apprentissage proposées dans ce cours, vous développerez le **procédé intégrateur** énoncé comme suit :

L'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire.

SAVOIRS MATHÉMATIQUES



Programmation linéaire

SM-1 Système d'inéquations du premier degré à deux variables

SM-2 Représentation des contraintes et de la fonction à optimiser
nction objectif ou économique)

étermination et interprétation des sommets et de la région-solution
ermée ou non)

odification des conditions de la situation pour la rendre plus efficiente

Tous les savoirs
mathématiques : SM.
On le reconnaît
à ce picto associé
aux Outils mathématiques.

Comment est construit
votre module.
Vous retrouverez des pages
+détaillées un peu +loin
à cet extrait.
KINESIS ÉDUCATION

OPTIMISATION EN CONTEXTE APPLIQUÉ — PRÉSENTATION

Présentation des *compétences disciplinaires*, des *compétences transversales*, et du contenu disciplinaire visés par le MAT 5160. ➨ *page VIII*

COMMENT EST CON…

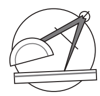
Les deux pages

Votre MAT 5160 est divisé en sections :

01 PROGRAMMATION LINÉAIRE

En début de module une *mise en situation*, ici : ***LE SPORT ÉLECTRONIQUE***.
Elle est tirée de la vie courante réelle ou virtuelle, et illustre l'utilité de la matière qui sera abordée.
DANS CE MODULE, vous dit ce que vous verrez comme nouvelles notions, à quoi cela sert en mathématique et dans la vie de tous les jours. ➨ *page 2*

1.1. Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues



Au début de chaque section : les **Outils mathématiques** nécessaires à l'acquisition des *savoirs mathématiques*. Présentation succincte, niveau de langue simple, exemples concrets, illustrations au besoin.
➨ *page 4 et suivantes*

1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

Un résumé des *savoirs mathématiques* est présenté sous forme de tableau. Il est suivi de *consolidations des savoirs* pour vous aider à maîtriser les nouveaux *savoirs mathématiques*.
➨ *page 61 et suivantes*

En conclusion du chapitre, des

1.7. Situations de vie

font un *retour sur la mise en situation du début*, laquelle peut maintenant être résolue grâce aux savoirs et compétences acquis dans ce chapitre.
➨ *page 68*

MAT 5160 PRÊT POUR L'ÉVALUATION DE FIN DE MODULE ?

PREMIÈRE PARTIE — Révision des connaissances

Banque de questions portant chacune sur l'un des *savoirs mathématiques* du module.

DEUXIÈME PARTIE — Révision des compétences

Banque de *situations-problèmes* permettant de vérifier l'acquisition de toutes les compétences liées à ce module.
➨ *page 103*

MAT 5160 GLOSSAIRE DES TERMES MATHÉMATIQUES

Un mini-dictionnaire : tous les termes apparaissant en ***italique rouge gras*** dans le module. ➨ *page 126*

Et des petits plus....

Pour en savoir un peu plus...

Pour les curieux... un prolongement des connaissances, et de l'enrichissement.
➨ *page 60*

VOTRE MAT 5160

ATTENTES DE FIN DE COURS — MAT 5160

Pour savoir où vous allez : la liste des *critères d'évaluation* de ce cours.
➨ *page XII*

Si on appliquait cette théorie ?

Ensuite, des cas concrets en relation avec les *savoirs mathématiques* que vous avez découverts dans les **Outils mathématiques**.
➨ *page 9 et suivantes*

Activités d'apprentissage — UN PEU DE PRATIQUE

Puis, de la pratique, pour vous aider à acquérir par étapes la ou les *compétences disciplinaires* à atteindre. Vous pouvez facilement repérer ces *activités d'apprentissage* grâce à la bande gris pâle sur la tranche du module.
➨ *page 13 et suivantes*

Situations-problèmes — UN PEU *PLUS* DE PRATIQUE

Viennent ensuite des situations plus globales et plus complexes, les *situations-problèmes* qui vous amèneront à maîtriser les *compétences transversales* visées par le MAT 5160.
Ces situations se repèrent grâce à la bande gris foncé sur la tranche du module.
➨ *page 77 et suivantes*

Situations d'évaluation de fin de chapitre

PREMIÈRE PARTIE — **Évaluation des connaissances**
DEUXIÈME PARTIE — **Évaluation des compétences**

Ces *SÉ* se trouvent vers la fin du module.
Elles sont signalées par une bande rouge à rayures blanches sur la tranche. Elles sont en deux parties : la première vous permet de vérifier l'acquisition des connaissances, ou *savoirs mathématiques* ; la seconde, l'acquisition des *compétences* dites *transversales*. ➨ *page 94 et suivantes*

Corrigé

Il vous donne les solutions de toutes les *activités d'apprentissage*, des *situations-problèmes* et des *consolidations des savoirs*.
Ce corrigé se repère grâce à la bande rouge sur la tranche du module.
➨ *page 128 et suivantes*

MAT 5160 — INDEX

Une table alphabétique des mots-clés et leurs références. ➨ *page 163 et suivantes*

En tiré à part pour l'enseignant

- Corrigé des **SÉ de fin de chapitre**
- Corrigé du **Prêt pour l'évaluation de fin de module ?**
- Grilles d'évaluation

ATTENTES DE FIN DE COURS

Objectifs visés
par ce cours

Au terme de ce cours, vous utiliserez la programmation linéaire dans le
des situations-problèmes liées à l'optimisation. Vous distinguerez les données explicites et implicites de la situation, planifierez votre solution en fonction des étapes de la méthode du simplexe, mettrez en œuvre votre solution (démarche et résultat) en tenant compte des contraintes et la validerez en respectant le contexte de la situation.

CRITÈRES D'ÉVALUATION

- Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes
- Déployer un raisonnement mathématique
- Communiquer à l'aide du langage mathématique*

1. UTILISER DES STRATÉGIES DE RÉSOLUTION DE SITUATIONS-PROBLÈMES

1.1 Manifestation, orale ou écrite, de la compréhension de la situation-problème

1.2 Mobilisation des stratégies et des savoirs mathématiques appropriés

2. DÉPLOYER UN RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

2.1 Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés

2.2 Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation

2.3 Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente

---

* La compétence 3 « Communiquer à l'aide du langage mathématique » ne fait pas l'objet d'une évaluation spécifique au regard de la sanction et de la reconnaissance. Toutefois, puisqu'elle se manifeste nécessairement dans toute activité mathématique, elle a été prise en compte dans les outils d'évaluation élaborés pour aider les enseignants à porter leur jugement.

OPTIMISATION
EN CONTEXTE APPLIQUÉ

Votre MAT 5160
est présenté en 1 chapitre
dont voici le titre:

01. PROGRAMMATION LINÉAIRE

01

PROGRAMMATION LINÉAIRE

Dans ce module, vous serez initié à l'optimisation à l'aide de la programmation linéaire. Vous utiliserez vos connaissances arithmétiques et algébriques dans le but de résoudre des situations-problèmes comportant des contraintes représentant des limites liées à des situations de vie réelles, et qui se traduisent par des inéquations.

Mise en situation:

En début de chapitre, une mise en situation tirée de la vie courante réelle ou virtuelle qui illustre l'utilité de la matière qui sera abordée.

LE SPORT ÉLECTRONIQUE

Charlène, surnommée Vexxa, est une semi-professionnelle du sport électronique, mieux connu sous son appellation anglaise *e-sport*. Elle gravit les échelons à un bon rythme, mais ne gagne pas encore suffisamment pour vivre des gains qu'elle remporte lors de compétitions organisées à travers le monde. Pour combler son manque à gagner en revenus, elle vend des ordinateurs et offre des mises à niveau aux personnes qui s'adonnent aux jeux vidéo dans le cadre de compétitions de sport électronique.

En général, sa clientèle est de deux types: ceux qui sont de niveau débutant et ceux qui sont de niveau pro. À ses débuts, Vexxa vendait des ordinateurs de deux types en faisant un petit profit. En prenant de l'expérience dans le monde mercantile, elle a compris rapidement qu'offrir les services était plus rentable que de vendre du matériel uniquement. Essentiellement, elle vend le même type d'ordinateur à tout le monde, mais avec des configurations différentes: la configuration *amateur* et la configuration *pro*.

La stratégie d'affaire de Vexxa est de vendre l'ordinateur de base et de le configurer pour chaque client selon son style de jeu. Pour Vexxa, la mise à niveau amateur est la plus rapide, car elle ne consiste qu'à faire de la configuration. La mise à niveau pro demande plus de temps, car il faut changer certaines pièces de l'ordinateur.

Vexxa, avec son emploi du temps, ne peut faire plus de douze mises à niveau par semaine et doit en faire au moins six pour s'assurer de la rentabilité de son commerce. Les mises à niveau amateur se font plus rapidement que les mises à niveau pro. Vexxa tient donc à faire toujours au moins autant de mises à niveau amateur que de mises à niveau pro, mais pas plus de deux fois plus.

Une mise à niveau amateur rapporte à Vexxa un profit de 70 \$, alors qu'une mise à niveau pro génère un profit de 250 \$.

Sauriez-vous dire combien de mises à niveau de chaque type Vexxa doit faire pour maximiser ses profits hebdomadaires, tout en tenant compte de ses contraintes de préférence ?

Comment être certain que la solution retenue est la bonne ? Vous verrez, dans ce module, tous les outils qu'il faut pour optimiser cette situation et beaucoup d'autres.

Le bloc Dans ce chapitre vous indique les nouvelles notions que vous apprendrez et quelles seront leurs utilités en mathématiques et dans la vie de tous les jours.

DANS CE MODULE

Quoi de nouveau ?

— La programmation linéaire

Qu'est-ce que c'est ?

— La programmation linéaire est une méthode permettant d'optimiser une fonction linéaire dans une situation soumise à des contraintes qui se traduisent par des inéquations linéaires.

À quoi ça sert en mathématiques ?

— La programmation linéaire sert à modéliser et à résoudre des situations-problèmes liées à l'optimisation. La programmation linéaire est une branche des mathématiques qui a pour but de trouver la solution qui optimise (maximise ou minimise) une fonction linéaire dans des situations soumises à des contraintes qui se traduisent par des inéquations linéaires.

À quoi ça servira dans la vie ?

— Optimiser une situation permet de prendre des décisions, que ce soit pour minimiser les coûts ou maximiser les profits, notamment dans la planification et le contrôle de la production et dans divers secteurs d'activités.

1.1. Résolution algébrique d'un systè… ons à deux inconnues

Le chapitre est divisé en sections.

KINĒSIS ÉDUCATION

■ VOUS CONNAISSEZ TROIS MÉTHODES DE RÉSOLU… STÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES : COMPARAISON, SUBSTITUTION ET ÉLIMINATION. VOICI UNE OCCASION DE RÉVISER CES TROIS MÉTHODES.

SM-3

Les outils mathématiques nécessaires à l'acquisition des savoirs mathématiques : SM.

KINĒSIS ÉDUCATION

Outils mathématiques

Méthode de comparaison — Méthode de substitution — Méthode d'élimination

1. Méthode de comparaison

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la ***méthode de comparaison*** consiste à isoler la même variable dans les deux équations et à comparer les deux expressions obtenues pour trouver le couple-solution du système.

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux variables par la **méthode de comparaison**, on suit les étapes suivantes :

On **isole** la même variable dans chacune des équations ;

On **compare** les expressions déterminées pour cette variable afin d'obtenir une équation comportant uniquement l'autre variable ;

On **résout** l'équation obtenue ;

On **calcule** la valeur de l'autre variable en remplaçant la variable déterminée précédemment par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations du système ;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations initiales.

Exemple

À l'aide de la méthode de comparaison, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

On **isole** la même variable dans chacune des équations. Isolor

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \dfrac{-x + 7}{2} \end{cases}$$

Cet outil comprend des exemples, des démarches détaillées et leurs résolutions.

KINĒSIS ÉDUCATION

On **compare** les deux expressions obtenues.

Le ***y*** de la **première équation** = le ***y*** de la **deuxième équation**

$$-2x + 8 = \frac{-x + 7}{2}$$

Outils mathématiques *suite*

On **résout** l'équation :

$$\begin{aligned} 2\,(-2x + 8) &= -x + 7 \\ -4x + 16 &= -x + 7 \\ -4x + x &= 7 - 16 \\ -3x &= -9 \\ x &= \frac{-9}{-3} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de l'autre variable, *y*, en substituant à *x* la valeur 3 dans l'une ou l'autre des équations obtenues à la première étape :

$$\begin{aligned} y &= -2x + 8 \\ y &= -2 \bullet \mathbf{3} + 8 \\ y &= -6 + 8 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} y &= \frac{-x + 7}{2} \\ y &= \frac{-\mathbf{3} + 7}{2} \\ y &= \frac{4}{2} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Le couple-solution du système est **(3, 2)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ 2 \bullet \mathbf{3} + \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 8 \\ 6 + 2 &\stackrel{?}{=} 8 \\ \mathbf{8} &\stackrel{?}{=} \mathbf{8} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai} \end{aligned}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ \mathbf{3} + 2 \bullet \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 7 \\ 3 + 4 &\stackrel{?}{=} 7 \\ \mathbf{7} &\stackrel{?}{=} \mathbf{7} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai} \end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on conclut que le couple **(3, 2)** est bien la **solution** du système d'équations.

2. Méthode de substitution

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la ***méthode de substitution*** consiste à isoler une variable dans l'une ou l'autre des équations dans l'autre équation par cette expression, puis à résoudre l'équa

Pour **résoudre un système** d'équations du premier degré à deu de substitution, on suit les étapes suivantes :

On **isole** une variable dans l'une des deux équations pour obt à cette variable ;

On **substitue** à cette même variable dans l'autre équation l'ex ent obtenue pour former une équation à une variable ;

On **résout** cette équation ;

Tous les termes apparaissant
en italique rouge gras
se retrouvent au glossaire
des termes mathématiques.

KINÉSIS ÉDUCATION

Outils mathématiques *suite*

On **calcule** la valeur de l'autre variable en remplaçant la variable déterminée précédemment par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations du système ;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans chacune des équations de départ.

Exemple
À l'aide de la méthode de substitution, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

On **isole** la variable x dans la deuxième équation :

$$x + 3y = 2 \quad \rightarrow \quad x = \text{-}3y + 2$$

On **substitue** cette expression à la variable x dans l'autre équation :

$$3x + 5y = 10$$
$$3\,(\mathbf{\text{-}3y + 2}) + 5y = 10$$

On **résout** l'équation :

$$\begin{aligned} \text{-}9y + 6 + 5y &= 10 \\ \text{-}4y &= 10 - 6 \\ \text{-}4y &= 4 \\ y &= \frac{4}{\text{-}4} \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{\text{-}1} \end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de la variable x :

$$\begin{aligned} x &= \text{-}3y + 2 \\ x &= \text{-}3 \bullet (\mathbf{\text{-}1}) + 2 \\ x &= 3 + 2 \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

Le couple-solution est **(5, -1)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables x et y par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 10 \\ 3 \bullet \mathbf{5} + 5 \bullet (\mathbf{\text{-}1}) &\overset{?}{=} 10 \\ 15 - 5 &\overset{?}{=} 10 \\ \mathbf{10} &\overset{?}{=} \mathbf{10} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai} \end{aligned}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ \mathbf{5} + 3 \bullet (\mathbf{\text{-}1}) &\overset{?}{=} 2 \\ 5 - 3 &\overset{?}{=} 2 \\ \mathbf{2} &\overset{?}{=} \mathbf{2} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai} \end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on conclut que le couple **(5, -1)** est bien la **solution** du système d'équations.

Outils mathématiques *suite*

3. Méthode d'élimination

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la ***méthode d'élimination*** consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations d'un système, ou deux équations équivalentes, puis à résoudre l'équation restante.

Pour **résoudre un système** d'équations du premier degré à deux variables par la méthode d'élimination, on suit les étapes suivantes :

On **transforme**, s'il y a lieu, les équations sous la forme $Ax + By = C$;

On **exprime**, s'il y a lieu, en nombres entiers les coefficients fractionnaires ou décimaux ;

On **choisit** la variable à éliminer ;

On **transforme** les équations du système en des équations équivalentes dans lesquelles les coefficients de la variable à éliminer sont opposées ;

On **additionne** les deux équations ainsi transformées ;

On **résout** l'équation obtenue ;

On **substitue** la valeur trouvée à la variable dans l'une ou l'autre des équations, puis on calcule la valeur de l'autre variable ;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations d'origine.

Exemple

À l'aide de la méthode d'élimination, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 5y = 18 \end{cases}$$

Ici, l'addition des deux équations données n'est pas suffisante pour trouver la solution du système d'équations, car elle ne permet pas l'élimination d'une variable. On doit préalablement multiplier chacune des deux équations par un nombre pour obtenir des coefficients opposés pour l'une des deux variables. On **choisit**, par exemple, d'éliminer la variable *x*. On détermine le P.P.C.M. (le plus petit commun multiple) des **coefficients 3 et 2** qui est **6**.

On **transforme** les équations du système en des équations équivalentes dans lesquelles les coefficients de la variable à éliminer sont opposés. On multiplie, par exemple, la première équation par 2 et la seconde par -3 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 & (\times 2) \\ 2x - 5y = 18 & (\times -3) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ -6x + 15y = -54 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 19y &= -38 \\ y &= \frac{-38}{19} \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Outils mathématiques *suite*

On substitue à y la valeur -2 dans l'une ou l'autre des équations d'origine pour calculer la valeur de x:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 3x + 2 \bullet (\mathbf{-2}) &= 8 \\ 3x - 4 &= 8 \\ 3x &= 8 + 4 \\ 3x &= 12 \\ x &= \frac{12}{3} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 18 \\ 2x - 5 \bullet (\mathbf{-2}) &= 18 \\ 2x + 10 &= 18 \\ 2x &= 18 - 10 \\ 2x &= 8 \\ x &= \frac{8}{2} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

Le couple-solution est **(4, -2)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 3 \bullet \mathbf{4} + 2 \bullet (\mathbf{-2}) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 12 - 4 &\stackrel{?}{=} 8 \\ \mathbf{8} &\stackrel{?}{=} \mathbf{8} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai} \end{aligned}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 18 \\ 2 \bullet \mathbf{4} - 5 \bullet (\mathbf{-2}) &\stackrel{?}{=} 18 \\ 8 + 10 &\stackrel{?}{=} 18 \\ \mathbf{18} &\stackrel{?}{=} \mathbf{18} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai} \end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(4, -2)** est bien la **solution** du système d'équations.

Si on appliquait cette théorie?

- DANS LES EXEMPLES SUIVANTS, VOUS RÉVISEREZ LES TROIS MÉTHODES ALGÉBRIQUES DE RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES.

Des cas concrets en relation avec les savoirs mathématiques. Celui-ci comprend au moins 2 exemples: Le premier est détaillé avec une démarche élaborée.

Exemple 1

On considère le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$$

Résoudre ce système d'équations par la méthode de

Solution

On **isole** la même variable dans chacune des équations. Isolons, par exemple, la variable y:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - y = 15 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 3x - 15 \end{cases}$$

On **compare** les deux expressions obtenues.

Le ***y*** de la **première équation** = le ***y*** de la **deuxième équation**

$$-2x + 5 = 3x - 15$$

On **résout** l'équation:

$$\begin{aligned} -2x + 5 &= 3x - 15 \\ -2x - 3x &= -15 - 5 \\ -5x &= -20 \\ x &= \frac{-20}{-5} \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de l'autre variable, y, en substituant à $\boldsymbol{x}$ la valeur **4** dans l'une ou l'autre des équations obtenues à la première étape:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 5 \\ y &= -2 \bullet \mathbf{4} + 5 \\ y &= -8 + 5 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{-3} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} y &= 3x - 15 \\ y &= 3 \bullet \mathbf{4} - 15 \\ y &= 12 - 15 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

Le couple-solution du système est **(4, -3)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$y = -2x + 5$

$-3 \stackrel{?}{=} -2 \bullet 4 + 5$

$-3 \stackrel{?}{=} -8 + 5$

$-3 \stackrel{?}{=} -3 \rightarrow$ **Vrai**

Deuxième équation :

$3x - y = 15$

$3 \bullet 4 - (-3) \stackrel{?}{=} 15$

$12 + 3 \stackrel{?}{=} 15$

$15 \stackrel{?}{=} 15 \rightarrow$ **Vrai**

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(4, -3)** est bien la **solution** du système d'équations.

Exemple 2

Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2y - x = 11 \end{cases}$$

Le deuxième exemple : à vous de démontrer votre savoir en effectuant la démarche proposée !

Solution

On **isole**, par exemple, la variable x dans la première équation :

$$x + y = 16 \rightarrow x = -y + 16$$

On **substitue** cette expression à la variable x dans l'autre équation :

$$2y - x = 11$$
$$2y - (-y + 16) = 11$$

On **résout** l'équation :

$$2y + y - 16 = 11$$
$$\boxed{}\,y - 16 = 11$$
$$3y = 11 + 16$$
$$3y = \boxed{}$$
$$y = \frac{27}{3}$$
$$y = 9$$

On **calcule** la valeur de la variable x :

$$x = -y + 16$$
$$x = -\boxed{} + 16$$
$$x = 7$$

Le couple-solution est **(7, 9)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$$x + y = 16$$

$$\mathbf{7} + \boxed{} \stackrel{?}{=} 16$$

$$\mathbf{16} \stackrel{?}{=} \mathbf{16} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai}$$

Deuxième équation :

$$2y - x = 11$$

$$2 \bullet \mathbf{9} - \boxed{} \stackrel{?}{=} 11$$

$$\boxed{} - 7 \stackrel{?}{=} 11$$

$$\mathbf{11} = \mathbf{11} \quad \rightarrow \quad \textbf{Vrai}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(7, 9)** est bien la **solution** du système d'équations.

Exemple 3
Résoudre le système d'équations suivant par la méthode d'élimination :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = 1 - \dfrac{2y}{3} \\ -1{,}2y = 6 - 0{,}4x \end{cases}$$

Troisième exemple :
Encore + de pratique !

Solution

On **transforme** les équations sous la forme $Ax + By = C$.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = 1 - \dfrac{2y}{3} \\ -1{,}2y = 6 - 0{,}4x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} = 1 \\ \boxed{}\,x - 1{,}2y = 6 \end{cases}$$

On **exprime** en nombres entiers les coefficients fractionnaires ou décimaux.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3} = 1 \\ 0{,}4x - 1{,}2y = 6 \quad (\times 10) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x + 4y}{6} = \dfrac{6}{6} \\ \boxed{}\,x - \boxed{}\,y = 60 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x + \boxed{}\,y = 6 \\ 4x - 12y = 60 \end{cases}$$

On **choisit** la variable à éliminer. Choisissons ici d'éliminer la variable *y*.

On transforme les équations du système en deux équations équivalentes dans lesquelles les **coefficients** de la variable *y* sont **opposés**. On multiplie donc la première équation par 3 et la seconde par 1.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \quad (\times \mathbf{3}) \\ 4x - 12y = 60 \quad (\times \mathbf{1}) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \boxed{}\,x + 12y = 18 \\ 4x - \boxed{}\,y = 60 \end{cases}$$

On **additionne** les deux équations ainsi transformées.

$$\left\{\begin{array}{l} 9x + 12y = 18 \\ 4x - 12y = 60 \\ \hline \end{array}\right.$$

$$13x = \boxed{}$$

$$x = \frac{78}{13}$$

$$\boldsymbol{x} = \boxed{}$$

On **substitue** la valeur 6 à la variable x dans l'une ou l'autre des équations.

$$3x + 4y = 6$$

$$3 \bullet \boxed{} + 4y = 6$$

$$\boxed{} + 4y = 6$$

$$4y = 6 - 18$$

$$4y = \boxed{}$$

$$y = \frac{-12}{4}$$

$$\boldsymbol{y} = \boxed{}$$

On obtient le couple-solution **(6, -3)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations d'origine.

Première équation :

$$\frac{x}{2} = 1 - \frac{2y}{3}$$

$$\frac{\mathbf{6}}{2} \overset{?}{=} 1 - \frac{2 \bullet (\mathbf{-3})}{3}$$

$$3 \overset{?}{=} 1 - \boxed{}$$

$$\mathbf{3 \overset{?}{=} 3} \rightarrow \textbf{Vrai}$$

Deuxième équation :

$$-1{,}2y = 6 - 0{,}4x$$

$$-1{,}2 \bullet \left(\boxed{}\right) \overset{?}{=} 6 - 0{,}4 \bullet \mathbf{6}$$

$$3{,}6 \overset{?}{=} 6 - \boxed{}$$

$$\mathbf{3{,}6 \overset{?}{=} 3{,}6} \rightarrow \textbf{Vrai}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(6, -3)** est bien la **solution** du système d'équations.

Maintenant que vous avez révisé les trois méthodes algébriques de résolution des systèmes d'équations, il ne vous reste plus qu'à vous exercer dans les **Activités d'apprentissage** que voici.

1. Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode algébrique de votre choix.

a) $\begin{cases} 2x - 3 = y \\ x - 2y = 9 \end{cases}$

Des activités d'apprentissage afin de vous pratiquer à acquérir par étapes la ou les compétences disciplinaires.

KINÉSIS ÉDUCATION

b) $\begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases}$

De l'espace fourni afin de vous faciliter la tâche en écrivant à même le module ! Aucune feuille volante !

KINÉSIS ÉDUCATION

c) $\begin{cases} x = 12y + 5 \\ x = 5y + 12 \end{cases}$

Une mention tout au bas vous indique à quelle page vous trouverez le corrigé afin de vous vérifier.

KINÉSIS ÉDUCATION

CORRIGÉ ➨ PAGE 128

1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

Nous arrivons à la fin du module traitant de programmation linéaire. Avant de vous attaquer aux **Situations-problèmes** plus globales qui vont conclure ce chapitre, voici un résumé des *savoirs mathématiques* que vous avez acquis jusqu'ici.

Résumé des savoirs mathématiques

Un résumé des savoirs mathématiques de ce chapitre vous est présenté.

KINÉSIS ÉDUCATION

Résolution d'un système d'équations

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **mé**
consiste à isoler la même variable dans les deux équations et à com
obtenues pour trouver le couple-solution du système.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **m**
consiste à isoler une variable dans l'une ou l'autre des équations du
dans l'autre équation par cette expression, puis à résoudre l'équation ainsi obtenue.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode d'élimination** consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations d'un système, ou deux équations équivalentes, puis à résoudre l'équation restante.

Représentation graphique de l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables

Un **système d'inéquations du premier degré à deux variables** admet généralement une infinité de solutions qui sont représentées par une région du plan cartésien. Cette région correspond à la région-solution commune à toutes les inéquations du système.

Représentation algébrique des contraintes

Les **contraintes** sont des limitations imposées aux variables dans une situation donnée. Ces limitations sont imposées soit par le temps, l'espace, le budget ou simplement par la volonté. Elles se traduisent par un système d'inéquations.

Les expressions « au moins », « pas moins que », « au minimum », « un minimum de », « est supérieur ou égal à », etc. se traduisent par le symbole **≥**.

Les expressions « au plus », « pas plus que », « au maximum », « un maximum de », « est inférieur ou égal à », « est limité à », « ne doit pas dépasser », « ne doit pas excéder », etc. se traduisent par le symbole **≤**.

Les expressions « plus que », « est supérieur à », « dépasse », « excède », etc. se traduisent par le symbole **>**.

Les expressions « moins que », « est inférieur à », etc. se traduisent par le symbole **<**.

Représentation graphique des contraintes

La région-solution de l'ensemble des contraintes d'une situation se nomme le **polygone de contraintes**. L'ensemble de tous les points du polygone de contraintes est l'ensemble-solution du système d'inéquations formé par les contraintes.

Fonction objectif

Dans un problème d'optimisation, on appelle **fonction objectif** ou **fonction économique** la **fonction à optimiser**, c'est-à-dire l'expression qu'on cherche à maximiser ou à minimiser.

Ajout d'une contrainte à un problème d'optimisation

L'ajout d'une contrainte à un problème d'optimisation peut avoir un effet sur la solution du problème. Pour évaluer l'effet d'une nouvelle contrainte sur la solution d'un problème d'optimisation, on évalue la fonction objectif avant l'ajout de la contrainte en chacun des sommets du polygone de contraintes, puis on évalue de nouveau la fonction objectif avec l'ajout de la contrainte en chacun des sommets du nouveau polygone de contraintes. On compare les deux valeurs optimales ainsi obtenues.

Consolidation des savoirs

1. Résoudre algébriquement les systèmes d'équations suivants par la méthode de votre choix.

Des consolidations des savoirs vous sont offertes afin de mieux les maîtriser.

KINÉSIS ÉDUCATION

a) $\begin{cases} y = 8x - 32 \\ 5x - 20 = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 5y = 56 \\ y = \text{-}6x + 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 8y = 19 \\ \text{-}4x - 5y = \text{-}4 \end{cases}$

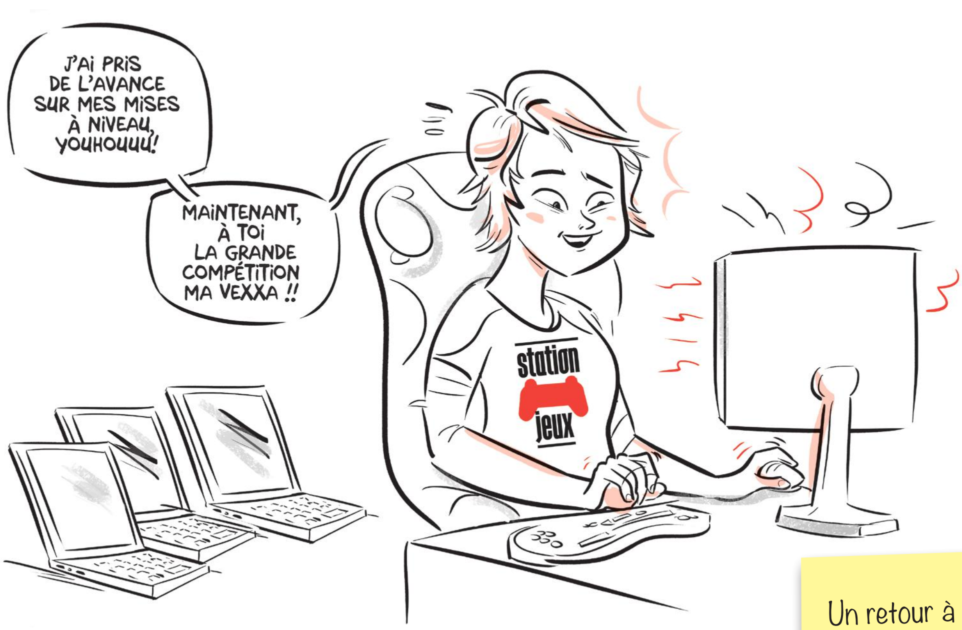
CORRIGÉ ➡ PAGE 147

1.7. Situations de vie

Au début de ce chapitre, vous avez fait connaissance avec Charlène, alias Vexxa, qui se spécialise dans le sport électronique. Afin de gagner un peu d'argent, elle vend des ordinateurs et offre deux types de configuration à ses clients : la mise à niveau amateur ou la mise à niveau pro.

Retour à la mise en situation :

L'OPTIMISATION AU SERVICE DU SPORT ÉLECTRONIQUE



Un retour à la situation de vie qui peut maintenant être résolue grâce aux savoirs et compétences que vous avez acquis jusqu'à présent.

KINÉSIS ÉDUCATION

Maintenant que vous avez acquis toutes les notions de ce chapitre sur l'o
de la programmation linéaire, vous êtes en mesure de déterminer de que
peut maximiser ses revenus, en tenant compte des contraintes liées à son
et à ses préférences.

1. Comment allier travail et sport électronique ?

Vexxa offre à ses clients deux types de configuration : la mise à niveau amateur et la mise à niveau pro. Comme elle doit garder du temps pour s'exercer, Vexxa ne peut faire plus de douze mises à niveau par semaine et doit en faire au moins six pour rentabiliser son commerce.

Elle tient à faire au moins autant de mises à niveau amateur que de mises à niveau pro, mais pas plus de deux fois plus.

Une mise à niveau amateur rapporte à Vexxa un profit de 70 $, alors qu'une mise à niveau pro génère un profit de 250 $.

  CORRIGÉ ➡ PAGE 152

1re tâche
Sauriez-vous dire combien de mises à niveau de chaque type Vexxa doit faire pour maximiser ses profits hebdomadaires, tout en tenant compte de ses contraintes de temps et de préférences?

Nous vous suggérons ici une démarche qui vous permettra de trouver la solution d'un problème d'optimisation.

1re étape: Traduction du problème en langage mathématique, c'est-à-dire:

On **identifie** d'abord les variables;

On **pose**, sous forme d'inéquation, chacune des contraintes auxquelles doivent obéir les variables;

On **pose** l'expression de Z, la fonction objectif.

On **identifie** les variables: les variables $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ représentent les valeurs qu'on doit trouver pour procéder à l'optimisation de la fonction $\boldsymbol{Z}$, qu'on appelle **fonction objectif** ou **fonction économique**.

x: ______________________________

y: ______________________________

Z: ______________________________

Passons maintenant aux contraintes. Dans tout problème d'optimisation, deux contraintes sont toujours présentes; on les appelle les **contraintes de non-négativité**. Le nombre de mises à niveau amateur et le nombre de mises à niveau pro ne peuvent en effet être des nombres négatifs:

$x \geq 0$
$y \geq 0$

Vexxa **ne peut faire plus de douze mises à niveau** par semaine et doit en faire **au moins six** pour que son commerce soit rentable.

Écrivez les deux contraintes qui traduisent cette affirmation.

____

____

CORRIGÉ ➡ PAGE 152

Elle tient à faire toujours **au moins autant de mises à niveau amateur que de mises à niveau pro**, mais **pas plus de deux fois plus**.

Écrivez les deux contraintes qui traduisent cette affirmation.

____

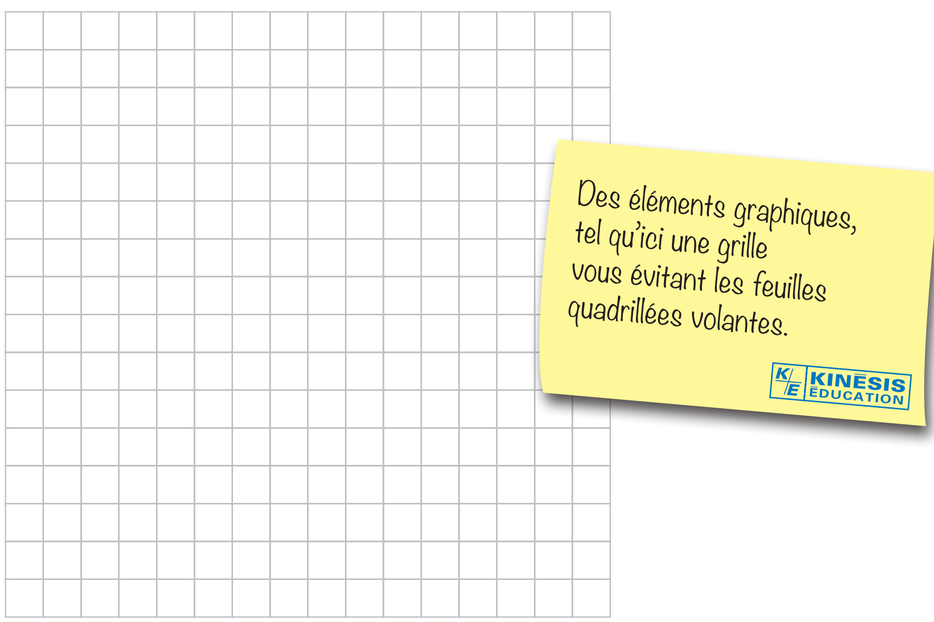
____

On **détermine** l'expression de la fonction objectif, c'est-à-dire la fonction à optimiser. Dans cette situation, Vexxa réalise un profit de 70 $ pour chaque mise à niveau amateur, soit 70x pour l'ensemble des mises à niveau amateur, et un profit de 250 $ pour une mise à niveau pro, donc 250y pour l'ensemble des mises à niveau pro. Le profit est obtenu en additionnant l'ensemble des profits réalisés sur les mises à niveau amateur et ceux réalisés sur les mises à niveau pro :

$Z =$ ______________________________________

2e étape : Analyse graphique des contraintes, c'est-à-dire :

On **trace** le polygone de contraintes correspondant au système d'inéquations déterminé précédemment :



CORRIGÉ ➡ PAGE 152

On **calcule** ensuite les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.

On peut identifier les quatre sommets du polygone A, B, C et D pour simplifier les notations. Il est recommandé de déterminer les coordonnées des sommets du polygone de contraintes en utilisant une méthode algébrique : comparaison, substitution ou élimination.

Désignons par A le point de rencontre des droites $x = y$ et $x + y = 6$. Calculez ici les coordonnées du point A :

Toujours de l'espace pour écrire vos développements tout au long des étapes !

KINÉSIS ÉDUCATION

Désignons par B le point de rencontre des droites $x = y$ et $x + y = 12$. Calculez ici les coordonnées du point B :

Désignons par C le point de rencontre des droites $x = 2y$ et $x + y = 12$. Calculez ici les coordonnées du point C :

CORRIGÉ ➡ PAGE 152

Désignons par D le point de rencontre des droites $x = 2y$ et $x + y = 6$. Calculez ici les coordonnées du point D :

3e étape : Recherche des valeurs des variables *x* et *y* qui optimisent la fonction *Z*, c'est-à-dire :

On **calcule** la valeur de la fonction Z pour chacun des sommets du polygone de contraintes ;

On **choisit** les valeurs des variables x et y qui optimisent la fonction Z de la façon désirée.

Analyse des sommets du polygone de contraintes
Pour chacun des sommets dont vous avez calculé les coordonnées à l'étape précédente, vous devez évaluer les profits possibles :

Sommet	$\boldsymbol{Z = 70x + 250y}$	**Profit**
A (☐ , ☐)	$Z = 70 \bullet$ ☐ $+ 250 \bullet$ ☐	☐
B (☐ , ☐)	$Z = 70 \bullet$ ☐ $+ 250 \bullet$ ☐	☐
C (☐ , ☐)	$Z = 70 \bullet$ ☐ $+ 250 \bullet$ ☐	☐
D (☐ , ☐)	$Z = 70 \bullet$ ☐ $+ 250 \bullet$ ☐	☐

Il ne reste plus qu'à sélectionner la valeur la plus élevée dans la colonne des profits et à énoncer pour quelles valeurs de x et y on obtient ce profit maximal.

____

____

De l'espace, toujours, afin d'y inscrire votre réponse !

CORRIGÉ ➡ PAGE 152

1. *Au Palais du Gourmet.*

Sabrina a récemment réalisé un rêve d'enfance : elle a ouvert un petit café dans un quartier huppé. Elle a appelé son petit commerce *Au Palais du Gourmet*. Sa spécialité est le gâteau au chocolat.

Son gâteau individuel qui est recouvert d'une montagne de crème glacée à la vanille, de sauce au chocolat chaude et d'une grosse cerise juteuse, se vend 8,50 $ et se mange la plupart du temps sur place.

Pour prolonger le plaisir, Sabrina offre à sa clientèle son gros gâteau de type familial à 22 $.

Sabrina confectionne toujours au moins autant de petits gâteaux que de gros.

Comme Sabrina possède peu de gros moules, elle ne prépare jamais plus de 40 gros gâteaux par jour.

Pour assurer la fraîcheur de ses pâtisseries, elle ne confectionne jamais plus de 100 gâteaux par jour.

Combien de gâteaux de chaque format Sabrina doit-elle préparer chaque jour pour maximiser le montant de ses ventes ?

Ces situations-problèmes sont plus globales et plus complexes afin de maîtriser les compétences transversales visées par ce module.

KINÉSIS ÉDUCATION

CORRIGÉ ➡ PAGE 155

1. SUITE

CORRIGÉ ➨ PAGE 155

Pour conclure ce module

Pour terminer ce module, traitant d'**optimisation par programmation linéaire**, et pour vous assurer que vous maîtrisez bien les notions que vous y avez découvertes, vous traiterez maintenant des SÉ. Les solutions de ces situations ne sont pas dans votre module : votre enseignante ou votre enseignant en fera la correction.

Avant d'aborder ces SÉ, nous vous recommandons de noter, sur une feuille, les formules, les énoncés et même des exemples que vous jugez importants. Vous pouvez utiliser cette feuille comme aide-mémoire.

Assurez-vous de présenter une solution claire et complète. Vous ne devez demander l'aide de personne. Ce qui vous permettra de vous évaluer, et de connaître les exigences et les attentes de fin d'étape. Ce faisant, vous pourrez, si vous constatez certaines lacunes, les corriger avant de poursuivre.

Cette auto-évaluation vous permettra aussi de savoir si vous répondez aux attentes fixées pour ce module MAT 5160.

Une banque de situations-problèmes supplémentaires vous permettra d'augmenter encore plus vos compétences en seconde partie du **Prêt pour l'évaluation de fin de module ?**.

Bon travail !

Ces situations d'évaluation
se trouvent à la fin du chapitre
et sont divisées
en 2 parties.
Votre enseignant(e) en fera
la correction.

KINÉSIS ÉDUCATION

01 PREMIÈRE PARTIE — Évaluation des connaissances

1. On considère...

Ces situations d'évaluation vous permettent de vérifier l'acquisition des connaissances et des compétences dites transversales.

KINÉSIS ÉDUCATION

01 DEUXIÈME PARTIE — Évaluation des compétences

5. Le magasin à rayons.

Mona est...

MAT
5160

PRÊT POUR L'ÉVALUATION DE FIN DE MODULE ?

Félicitations, vous êtes près de la fin, le questionnaire qui suit a été préparé pour vous permettre d'évaluer vos forces et vos faiblesses dans ce module. Le corrigé de ce questionnaire ne se trouve pas dans votre module. Votre enseignant en fera la correction.

La première partie de ce questionnaire porte sur les savoirs mathématiques de ce cours. Dans la deuxième partie de cette rubrique, vous trouverez dix situations-problèmes pour démontrer vos compétences liées à ce module : utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes et déployer un raisonnement mathématique. Bonne révision !

PREMIÈRE PARTIE — Révision des connaissances

1. Résoudre...

Cette section est constituée de 2 banques d'exercices dont votre enseignant(e) en fera la correction : ceci dans le but d'évaluer vos forces et vos faiblesses.

KINÉSIS ÉDUCATION

DEUXIÈME PARTIE — Révision des compétences

Voici enfin le dernier virage avant l'examen : une banque de 10 situations-problèmes portant sur l'optimisation par programmation linéaire. Faites-en bon usage!

1. Les promesses de Martin le malin.
C'est vendredi...

Un glossaire des termes mathématiques.

contrainte

Une contrainte est une limitation à laquelle sont [...] les variables de la fonction objectif. Dans un problème d'optimisation, les contraintes se traduisent par des inéquations.

contrainte de non-négativité

Une contrainte de non-négativité est une contrainte qui indique qu'une variable ne peut prendre de valeur négative.
Par exemple : $x \geq 0$ ou $y \geq 0$.

fonction économique

La fonction économique est la fonction à optimiser d'un problème d'optimisation. C'est l'expression que l'on veut minimiser ou maximiser par la résolution du problème. Elle est généralement de la forme $Z = \text{A}x + \text{B}y + \text{C}$.

fonction objectif

La fonction objectif est la fonction à optimiser d'un problème d'optimisation. C'est l'expression que l'on veut minimiser ou maximiser par la résolution du problème. Elle est généralement de la forme $Z = \text{A}x + \text{B}y + \text{C}$.

méthode d'élimination

La méthode d'élimination permet de résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux variables. Cette méthode consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations du système pour obtenir une équation à une variable qui en résulte.

méthode de comparaison

La méthode de comparaison permet de résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux variables. Cette méthode consiste à isoler la même variable (soit la variable y ou la variable x) dans les deux équations, à poser une égalité entre les deux expressions équivalentes et à résoudre l'équation à une variable.

méthode de substitution

La méthode de substitution permet de résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux variables. Cette méthode consiste à isoler une variable (soit la variable y ou la variable x) dans l'une ou l'autre des équations du système, à remplacer cette variable dans l'autre équation par cette expression, puis de résoudre l'équation à une variable ainsi obtenue.

1.1. Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Activités d'apprentissage.

KINÉSIS ÉDUCATION

1. p. 13

a) Par substitution :

$$\begin{cases} 2x - 3 = y \\ x - 2y = 9 \end{cases}$$

$$x - 2y = 9$$
$$x - 2(2x - 3) = 9$$
$$x - 4x + 6 = 9$$
$$-3x = 9 - 6$$

$$-3x = 3$$
$$x = \frac{3}{-3}$$
$$x = -1$$

$$2 \bullet (-1) - 3 = y$$
$$-2 - 3 = y$$
$$y = -5$$

Le couple-solution est (-1, -5).

b) Par élimination :

$$\begin{cases} 5x - 12y = 22 & (\times 1) \\ 7x - 6y = 20 & (\times -2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ -14x + 12y = -40 \end{cases}$$
$$-9x = -18$$
$$x = \frac{-18}{-9}$$
$$x = 2$$

$$5x - 12y = 22$$
$$5 \bullet 2 - 12y = 22$$
$$10 - 12y = 22$$
$$-12y = 22 - 10$$
$$-12y = 12$$
$$y = \frac{12}{-12}$$
$$y = -1$$

Le couple-solution est (2, -1).

c) Par comparaison :

$$\begin{cases} x = 12y + 5 \\ x = 5y + 12 \end{cases} \rightarrow 12y + 5 = 5y + 12$$

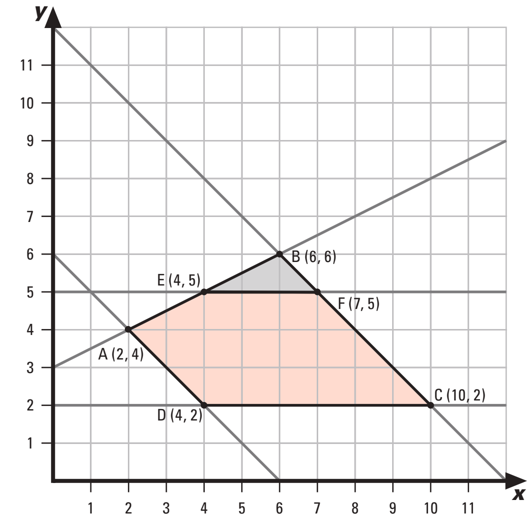
$$12y + 5 = 5y + 12$$
$$12y - 5y = 12 - 5$$
$$7y = 7$$
$$y = \frac{7}{7}$$
$$y = 1$$

$$x = 12y + 5$$
$$x = 12 \bullet 1 + 5$$
$$x = 12 + 5$$
$$x = 17$$

Le couple-solution est (17, 1).

10. p. 57 *suite*

c) **Nouveau polygone de contraintes :**



Analyse des sommets du nouveau polygone de contraintes :

Sommet	$Z = 12x + 8y$	Valeur de Z
A (2, 4)	$Z = 12 \bullet 2 + 8 \bullet 4$	56
C (10, 2)	$Z = 12 \bullet 10 + 8 \bullet 2$	136
D (4, 2)	$Z = 12 \bullet 4 + 8 \bullet 2$	64
E (4, 5)	$Z = 12 \bullet 4 + 8 \bullet 5$	88
F (7, 5)	$Z = 12 \bullet 7 + 8 \bullet 5$	124

La valeur maximale de Z est 136.
L'ajout de la contrainte n'a pas d'effet sur la fonction objectif.

1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

1. p. 62

a) Par comparaison :

$$\begin{cases} y = 8x - 32 \\ 5x - 20 = y \end{cases} \rightarrow 8x - 32 = 5x - 20$$

$$\begin{aligned} 8x - 32 &= 5x - 20 \\ 8x - 5x &= \text{-}20 + 32 \\ 3x &= 12 \\ x &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 8x - 32 \\ y &= 8 \bullet 4 - 32 \\ y &= 32 - 32 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Le couple-solution est (4, 0).

1.7. Situations de vie

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Situations de vie.

KINÉSIS ÉDUCATION

1. Comment allier travail et sport électronique ?

p. 68

1re tâche

Identification des variables :

x : **Le nombre de mises à niveau amateur**

y : **Le nombre de mises à niveau pro**

Z : **Le montant des profits**

Traduction des contraintes en inéquations :

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$\boldsymbol{x + y \leq 12}$

$\boldsymbol{x + y \geq 6}$

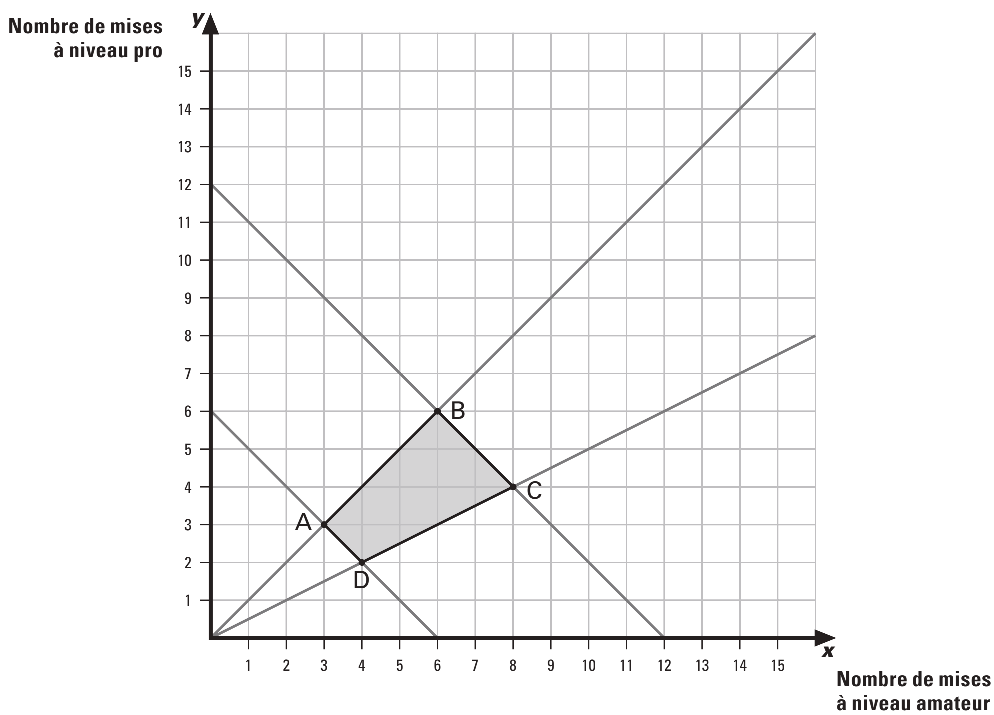
$\boldsymbol{x \geq y}$

$\boldsymbol{x \leq 2y}$

Fonction objectif :

$\boldsymbol{Z = 70x + 250y}$

Tracé du polygone de contraintes :



Calcul des coordonnées des sommets du polygone de contraintes :

Coordonnées du point A :

$$\begin{cases} x = y \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient :

$x + x = 6$

$2x = 6$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$

$x = y$

$3 = y$

Les coordonnées du point A sont (3, 3).

Coordonnées du point B :

$$\begin{cases} x = y \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient :

$x + x = 12$

$2x = 12$

$x = \frac{12}{2}$

$x = 6$

$x = y$

$6 = y$

Les coordonnées du point B sont (6, 6).

1. *Au Palais du Gourmet*.

p. 77

Identification des variables :

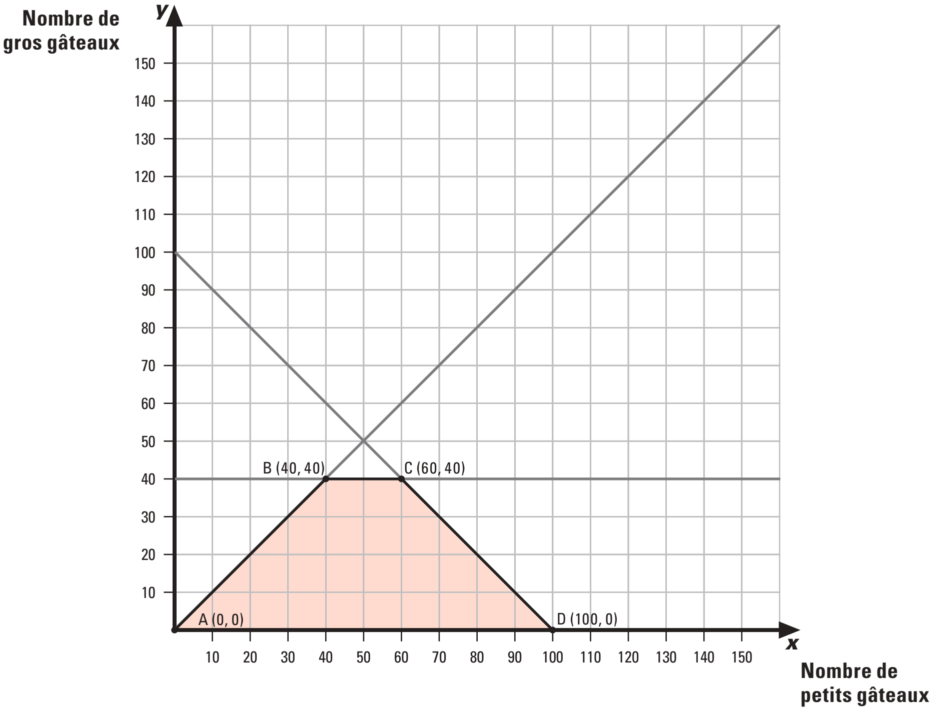
x : le nombre de petits gâteaux
y : le nombre de gros gâteaux
Z : le montant des ventes par jour

Contraintes :

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \geq y$
$y \leq 40$
$x + y \leq 100$

Fonction objectif : $Z = 8{,}50x + 22y$

Polygone de contraintes :



Analyse des sommets du polygone de contraintes :

Sommet	$Z = 8{,}50x + 22y$	Montant des ventes
A (0, 0)	$Z = 8{,}50 \bullet 0 + 22 \bullet 0$	0 $
B (40, 40)	$Z = 8{,}50 \bullet 40 + 22 \bullet 40$	1 220 $
C (60, 40)	$Z = 8{,}50 \bullet 60 + 22 \bullet 40$	1 390 $
D (100, 0)	$Z = 8{,}50 \bullet 100 + 22 \bullet 0$	850 $

En confectionnant 60 petits gâteaux et 40 gros gâteaux, le montant des ventes est maximal à 1 390 $.

Une table alphabétique
des mots clés
et leurs références.

À propos de l'illustrateur et des illustrations…

Les illustrations des couvertures et les illustrations que vous trouverez au fil des pages de ce module sont des illustrations originales, commandées pour notre collection à Paul Bordeleau, illustrateur québécois, auteur de bandes dessinées et illustrateur-éditorialiste pour l'hebdomadaire *Voir* de 1992 à 2004, et pour le journal *La Presse* en 2001 et 2002. En 2003, il a pris la relève de Garnotte et de Gité comme illustrateur de nos collections.

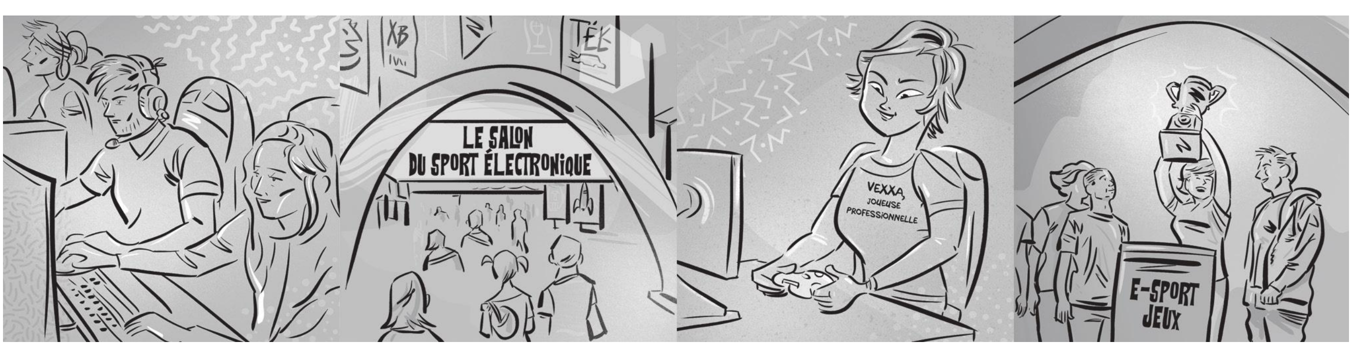
Une page est consacrée à l'illustrateur afin de vous le présenter.

En 2009, il était l'un des bédéistes invités au festival *BoomFest* de Saint-Pétersbourg, en Russie. Il a illustré entre autres le générique de la télésérie *La Galère* à Ici Radio-Canada. En 2016, il a participé au projet *Correspondances* de Lyon.

Dans la collection MAT, ses illustrations sont parfois conçues comme de petites pauses détente au fil des chapitres.

D'autres fois, elles sont des illustrations essentielles à la compréhension et à la résolution des situations qui vous sont présentées.

Dans les pages d'ouverture des chapitres, elles illustrent la situation concrète qui vous amène à vous plonger dans la réalité mathématique des activités d'apprentissage et des situations-problèmes. Ces activités et ces situations vous permettent d'acquérir la maîtrise des savoirs mathématiques visée par le module.



Vous voulez en savoir plus sur Paul Bordeleau ?
Voici ses coordonnées : www.paulbordeleau.com

Les petits plus...

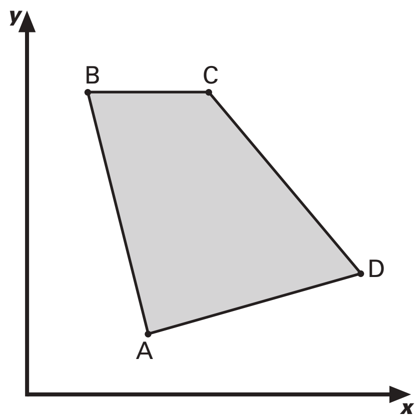
Pour en savoir un peu plus...

La droite baladeuse

On peut se servir de ce qu'on appelle la *droite baladeuse* pour trouver le couple (x, y) qui optimise une situation. Pour ce faire, on doit d'abord représenter le polygone de contraintes, puis se servir d'une droite de pente $\frac{-A}{B}$, où A et B sont les coefficients de la fonction objectif : $Z = Ax + By + C$.

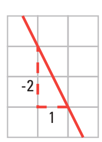
Exemple

On considère des variables x et y soumises aux contraintes représentées par le polygone de contraintes ci-dessous :

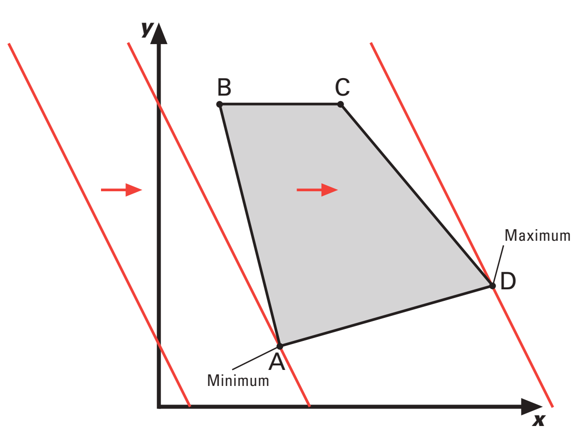


Pour les curieux, un prolongement des connaissances et de l'enrichissement.

La fonction objectif est $Z = 10x + 5y - 2$. La pente de la droite est $\frac{-A}{B}$, c'est-à-dire $\frac{-10}{5}$, soit $\frac{-2}{1}$. La droite baladeuse a pour pente $\frac{-2}{1}$:



À partir de la gauche du graphique, on déplace, vers la droite, une droite de pente -2 jusqu'à ce qu'elle rencontre le premier sommet : c'est le point qui donne lieu au minimum de la fonction objectif. Si l'on poursuit le déplacement de la droite baladeuse vers la droite, on obtient le maximum de la fonction objectif lorsque l'on rencontre le dernier sommet :



Le MAT 5160

Vise l'acquisition de deux grandes compétences transversales : actualiser son potentiel et se donner des méthodes de travail efficaces. Au moyen d'un procédé intégrateur : l'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire.

MAT TS 5160 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

Notre maison n'a qu'une seule et unique raison d'être depuis sa création il y a plus d'un demi-siècle : publier des ouvrages de qualité irréprochable, de bonne tenue, aux contenus solides, privilégiant des démarches en accord avec les principes des différentes approches pédagogiques, et libres de tout compromis de caractère purement commercial.

ISBN 978-2-7615-0770-7

9 782761 507707

401 1672

Florence Grandchamp
Drita Neziri
Abdelkader Amara
Raymond Thériault

ÉDITION 2022

OPTIMISATION EN CONTEXTE APPLIQUÉ

MAT TS 5160 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

Ce document est disponible gratuitement pour l'enseignant(e). Il suffit d'en faire la demande à editions@ebbp.ca

KINÉSIS ÉDUCATION

TIRÉ À PART

Corrigé des *Situations d'évaluation de fin de chapitre*

Grilles d'évaluation

Corrigé du *Prêt pour l'évaluation de fin de module ?*

KINĒSIS ĒDUCATION