



الرياضيات

الصف الثامن - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

8

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

هبه ماهر التميمي إبراهيم أحمد عمارة د. عيسى عبدالوهاب الطراونة

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 📧 P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدرّيس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2021/3)، تاريخ 2021/6/10 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2021/107) تاريخ 2021/6/30 م بدءاً من العام الدراسي 2021 / 2022 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2021.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 358 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2049)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
الرياضيات الصف الثامن: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الأول) / المركز الوطني لتطوير المناهج. - ط2؛ مزيدة
ومنتقحة. - عمان: المركز، 2022
(171) ص.

ر.إ.: 2022/4/2049

الواصفات: / الرياضيات // المناهج // التعليم الاعدادي /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعتبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

1442 هـ / 2021 م
2022 م - 2023 م

الطبعة الأولى (التجريبية)
أعيدت طباعته

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبعة عالمياً على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتسهّل في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدمة لهم. كما عُني بإبراز خطة حلّ المسألة، فأفرد لها دروساً مستقلة تتيح للطلبة التدرّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوعة. لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهمّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أعدّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأننا ندرك جيداً حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة تُوفّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مهمّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوىً تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت طلبتنا أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالمٍ يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ تقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

66 **الوحدة 2** تحليل المقادير الجبرية

67 مشروع الوحدة: القطع الجبرية

الدرس 1 حالات خاصة من ضرب المقادير الجبرية 68

74 نشاط مفاهيمي: تحليل المقادير الجبرية

الدرس 2 التحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر 75

الدرس 3 تحليل ثلاثيات الحدود $x^2 + bx + c$.. 83

الدرس 4 حالات خاصة من التحليل 89

الدرس 5 تبسيط المقادير الجبرية النسبية 96

102 اختبار نهاية الوحدة

6 **الوحدة 1** الأعداد الحقيقية

7 مشروع الوحدة: الأعداد الحقيقية في الفن

الدرس 1 الجذور التربيعية 8

الدرس 2 الجذور الصماء 13

نشاط مفاهيمي: نظرية فيثاغورس 21

الدرس 3 نظرية فيثاغورس 22

الدرس 4 الأعداد الحقيقية 29

الدرس 5 الأسس النسبية والجذور 37

الدرس 6 ضرب الأسس النسبية وقسمتها 43

الدرس 7 الصيغة العلمية 50

الدرس 8 النسبة المئوية 57

64 اختبار نهاية الوحدة

قائمة المحتويات

146 **الوحدة 4** المثلثات المتطابقة

147 مشروع الوحدة: أبنى جسرًا

148 ... **الدرس 1** تطابق المثلثات (SSS, SAS, HL)

156 **الدرس 2** تطابق المثلثات (ASA, AAS)

الدرس 3 المثلثات المتطابقة الضلعين

162 والمثلثات المتطابقة الأضلاع

170 اختبار نهاية الوحدة

104 ... **الوحدة 3** المعادلات الخطية بمتغيرين

105 مشروع الوحدة: المعادلات الخطية والخريطة

106 ... **الدرس 1** المعادلة الخطية بالصورة القياسية

114 **الدرس 2** ميل المستقيم

الدرس 3 معادلة المستقيم

121 بصيغة الميل والمقطع

130 ... **الدرس 4** معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

137 ... **الدرس 5** المستقيمات المتوازية والمتعامدة

144 اختبار نهاية الوحدة



الأعداد الحقيقية

ما أهمية هذه الوحدة؟

للأعداد الحقيقية تطبيقات حياتية كثيرة، منها قياس الأطوال ونسب التغير في الكميات بدقة. ويمكن أيضًا استعمال الأعداد الحقيقية للتعبير عن الكميات الكبيرة جدًا أو الصغيرة جدًا، مثل قطر الحمض النووي بالصيغة العلمية.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- التمييز بين الأعداد النسبية وغير النسبية.
- توظيف نظرية فيثاغورس وعكسها في حل مسائل حياتية.
- تطبيق قوانين الأسس النسبية في تبسيط مقادير أسية.
- حل مسائل حياتية على النسبة المئوية.

تعلمت سابقًا:

- ✓ تبسيط مقادير عددية تتضمن أسسًا صحيحة بتطبيق أولويات العمليات الحسابية.
- ✓ حل مسائل حياتية باستعمال التناسب والتقسيم التناسبي.
- ✓ حل مسائل على النسبة المئوية تتضمن الخصم أو الضريبة.



مشروع الوحدة: الأعداد الحقيقية في الفن

3 أستمعل نظرية فيثاغورس لتحديد طول الوتر c . أستمعل
خط الأعداد لتحديد c - إذا لزم الأمر - ثم أرسم الوتر،
وأكمل باقي الشكل.

أستعد ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص الذي نوظف
فيه ما نتعلمه في هذه الوحدة حول الأعداد الحقيقية ونظرية
فيثاغورس في رسم زخرفة هندسية على الزجاج.

4 أكمل الجدول الآتي بوضع إشارة (✓) أو (X) في الخانة
المناسبة:

العدد	نسبي	غير نسبي	جذر أصم	جذر غير أصم
a				
b				
d				
c				

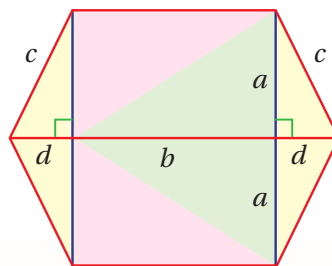
الأدوات اللازمة:

أنبوب تحديد على الزجاج، فرش
للتلوين، ألوان زجاج، لوح زجاجي



خطوات تنفيذ المشروع:

أختار قياسات مناسبة للشكل أدناه، ثم أرسمه على الزجاج
باتباع الخطوات الآتية:



5 ألون الشكل على الورقة؛ تمهيداً لمحاكاته على الزجاج.

1 أختار مربعين كاملين يشكّل جذراهما بُعدي المستطيل
 a و b ، ثم أرسم المستطيلين في الأعلى والأسفل على
ورقة.

6 أرسم الشكل على الزجاج محافظاً على القياسات التي
اخترتها، وألونها.

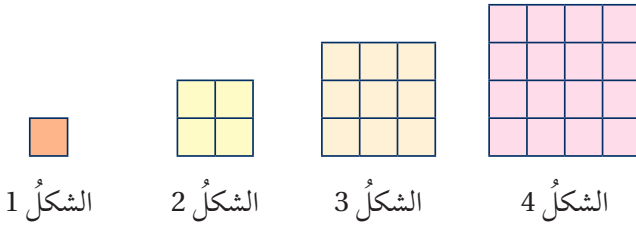
2 أختار جذراً أصم ليشكّل المسافة d ، وأستخدم خط
الأعداد لتحديد بدقه. أرسم الضلعين اللذين طول كل
منهما d .

عرض النتائج:

تعرض المجموعات زخارفها على الزجاج وجداولها، وتناقش
كيفية اختيار الأطوال.

أستكشف

إذا استمرّ النمط في الشكل الآتي، فما رقم أول شكلٍ يحتوي أكثر من 180 وحدة مربعة؟



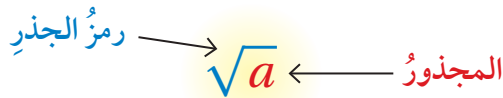
فكرة الدرس

أجد قيمة الجذر التربيعي لعدد، وأستخدمه في حل مسائل حياتية.

المصطلحات

الجذر التربيعي، الجذر التربيعي الرئيس، المجذور

الجذر التربيعي (square root) لعدد ما هو أحد عامليه المتساويين. ولأي عددٍ موجبٍ جذرانٍ تربيعيان، أحدهما موجبٌ والآخر سالبٌ، ويُسمى الموجبُ منهما **الجذر التربيعي الرئيس** (principal square root). ويستعملُ رمزُ الجذرِ التربيعيِّ $\sqrt{\quad}$ للدلالة على الجذرِ التربيعيِّ الرئيس، ويُسمى العددُ أسفلَ الجذرِ **المجذور** (radicand).



لغة الرياضيات

يُقرأ الرمز \pm موجباً أو سالباً، ويدلُّ على كلا الجذرين التربيعيين للعدد الموجب.

$\sqrt{64}$ ← الجذر التربيعي الرئيس للعدد 64

$-\sqrt{64}$ ← معكوس الجذر التربيعي الرئيس للعدد 64

$\pm\sqrt{64}$ ← الجذران التربيعيان للعدد 64

مثال 1

أجد كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{36}$

$\sqrt{36} = 6$

أجد الجذر التربيعي الموجب للعدد 36

2 $\pm\sqrt{1.69}$

$\pm\sqrt{1.69} = \pm 1.3$

أجد الجذرين التربيعيين للعدد 1.69

الوحدة 1

3 $-\sqrt{\frac{25}{64}}$

$$-\sqrt{\frac{25}{64}} = -\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2} = -\frac{5}{8}$$

أجدُ الجذرَ التربيعيَّ السالبَ للعددِ $\frac{25}{64}$

أتحقق من فهمي: 

4 $\sqrt{81} = 9$

5 $-\sqrt{1.96} = -1.4$

6 $\pm\sqrt{\frac{4}{121}} = \pm\frac{2}{11}$

يمكنني استعمال تعريف الجذر التربيعي لعدد موجب في حل معادلات تتضمن متغيرات مربعة، فإذا كان $n^2 = c$

$$\text{فإن } n = \pm\sqrt{c}$$

مثال 2

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

1 $x^2 = 144$

$$\begin{aligned} x^2 &= 144 \\ x &= \pm\sqrt{144} \\ &= \pm 12 \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
تعريف الجذر التربيعي
أجد قيمة الجذر

أتحقق من صحة الحل:

عندما $x = -12$

$$\begin{aligned} (-12)^2 &\stackrel{?}{=} 144 \\ 144 &= 144 \quad \checkmark \end{aligned}$$

عندما $x = 12$

$$\begin{aligned} (12)^2 &\stackrel{?}{=} 144 \\ 144 &= 144 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2 $t^2 = \frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{1}{36} \\ t &= \pm\sqrt{\frac{1}{36}} \\ &= \pm\frac{1}{6} \end{aligned}$$

المعادلة الأصلية
تعريف الجذر التربيعي
أجد قيمة الجذر

أتحقق من صحة الحل:

عندما $x = -\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{6}\right)^2 &\stackrel{?}{=} \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} &= \frac{1}{36} \quad \checkmark \end{aligned}$$

عندما $x = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}\right)^2 &\stackrel{?}{=} \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} &= \frac{1}{36} \quad \checkmark \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي:



3 $y^2 = 2.25$ $y = \pm 1.5$

4 $x^2 = \frac{16}{169}$ $x = \pm \frac{4}{13}$

يُستعملُ الجذرُ التربيعيُّ الموجبُ عادةً في المواقفِ الحياتيةِ والعمليةِ.

مثال 3: من الحياة



أهرام: هرمُ الشمسِ في المكسيكِ ثالثُ أكبرِ هرمٍ في العالمِ، قاعدتهُ مربعةُ الشكلِ مساحتها 50625 m^2 ، أجدُ طولَ ضلعِ قاعدتهِ.

الخطوة 1 أكتبُ المسألةَ على صورةٍ معادلةٍ.

أفرضُ أنَّ x طولُ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ، وبما أنَّ القاعدةَ مربعةُ الشكلِ، فإنَّ مساحتها تساوي مربعَ طولِ الضلعِ.

$A = x^2$ مساحةُ المربعِ

$x^2 = 50625$ أعوضُ لأكونَ معادلةً

الخطوة 2 أبحثُ عنَ عاملينِ متساويينِ.

لحلِّ المعادلةِ، أبحثُ عنَ عاملينِ متساويينِ للعددِ 50625، وذلكُ بتحليله إلى عوامله الأولية:

$50625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ أحلُّ العددَ إلى عوامله الأولية

$= (5 \times 5 \times 3 \times 3) (5 \times 5 \times 3 \times 3)$ الخاصيةُ التجميعيةُ

$= 225 \times 225$ أضربُ

الخطوة 3 أجدُ طولَ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ.

لإيجادِ طولِ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ أحلُّ المعادلةَ $x^2 = 50625$

$x^2 = 50625$ أكتبُ المعادلةَ

$x = \pm \sqrt{50625}$ تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ

$x = \pm 225$ أجدُ قيمةَ الجذرِ

وبما أنَّ الطولَ لا يمكنُ أن يكونَ سالبًا، إذن، طولُ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ هو $\sqrt{50625}$ ويساوي 225 m

الوحدة 1



أتحقق من فهمي:



صورةً مربعة الشكل مساحتها 3136 cm^2 ، أرادت ريمًا وضعها في بروازٍ مربع الشكل طول ضلعه الداخلي 58 cm ، هل يمكنها ذلك؟ أبرّر إجابتي.
يمكن لأن طول ضلع الصورة 56 cm أقل من طول ضلع البرواز الداخلي 58 cm

أتحرب وأحل المسائل

أجد كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{\frac{49}{169}} \quad \frac{7}{13}$

2 $-\sqrt{2.56} \quad -1.6$

3 $\pm\sqrt{576} \quad \pm 24$

4 $\sqrt{0.0001} \quad 0.01$

5 $(\sqrt{81})^2$

6 $(-\sqrt{0.01})^2$

81، لأن مربع جذر عدد يساوي العدد نفسه.

7 $\frac{\sqrt{100-36}}{\sqrt{16}}$

8 $\sqrt{0.25+1.44}$

2 (أنظر تبرير الطلبة).

1.3 (أنظر تبرير الطلبة)

9 $\sqrt{2.61-0.36}$

10 $0.4^2 + \sqrt{1.96}$

1.5 (أنظر تبرير الطلبة).

1.56 (أنظر تبرير الطلبة).

أحل كلاً من المعادلات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

في الأسئلة (11-13) أنظر تحقق الطلبة.

11 $t^2 = \frac{64}{100}$

12 $y^2 = 0.0144$

13 $\sqrt{y} = \frac{3}{5}$

$t = \pm \frac{8}{10}$

$y = \pm 0.12$

$y = \frac{9}{25}$

14 **بناءً:** بلط بناءً أرضية غرفة مربعة الشكل بـ 75 بلاطة بيضاء و 75 بلاطة صفراء

و 75 بلاطة بيضاء. ما عدد البلاطات التي تشكل طول ضلع قاعدة الغرفة؟

15

إرشاد

أستعمل الحقيقة

$$576 = 4 \times 9 \times 16$$

لحل المسألة 3

6) 0.01 لأن مربع جذر عدد

يساوي العدد نفسه ومربع

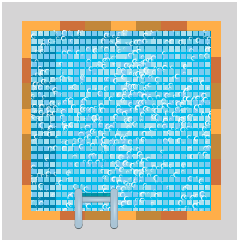
السالب موجب.

إرشاد

لحل المعادلة في

المسألة 13، أجد مربع

طرفي المعادلة.



15 **مسابح:** مسبح مربع الشكل، مساحته 169 m^2 ، يحيطُ به ممرٌ عرضه 1 m . أجدُ محيطَ الممرِّ. 60

أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في لأكون عبارةً صحيحةً في كلِّ ممَّا يأتي:

16 $\sqrt{2.61-0.65} < 1.6$

17 $1.3^2 > \sqrt{1.27+1.29}$

18 $\sqrt{0.81} > 0.9^2$

19 $\sqrt{1.24+0.2} = 1.2$

20 **أنماط:** أعودُ إلى فقرة (أستكشف) بدايةً الدرس، وأحلُّ المسألة. 14

مهارات التفكير العليا

أفكر

ما العلاقةُ بينَ عددِ المقاعدِ على طولِ ضلعِ المربعِ الكبيرِ وعددِ المقاعدِ على طولِ ضلعِ المربعِ الصغيرِ؟

21 **تبرير:** في حفلٍ تخريجٍ للطلبةِ في إحدى الجامعاتِ، وُرِّعَتِ المقاعدُ على 4 أقسامٍ كلِّ منها على شكلٍ مربعٍ فيه العددُ نفسه من المقاعدِ، لتشكلَ الأقسامُ الأربعةَ معًا مربعًا كبيرًا. إذا كانَ في أحدِ الأقسامِ 625 مقعدًا، فما عددُ المقاعدِ الموضوعَةِ على ضلعِ المربعِ الكبيرِ؟ أبرِّرُ إجابتي. 50، أنظر تبرير الطلبة.

22 **تبرير:** هل يمكنُ إيجادُ $\sqrt{-100}$ ؟ أبرِّرُ إجابتي.

لا، لا يوجد عدد مربعه سالب ضمن مجموعات الأعداد التي يعرفها الطلبة.

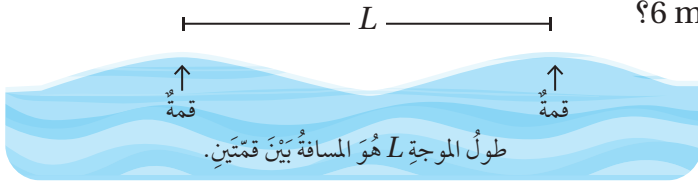
23 **تحد:** قرَّرتُ مصمِّمةً تغطيةَ أرضيةِ مسرحٍ مربعةِ الشكلِ بنوعٍ خاصٍّ من الخشبِ سعرُ المترِ المربعِ الواحدِ منه 4 JD، فبلغتِ التكلفةُ 1024 JD. أجدُ طولَ المسرحِ. 16 متر

24 **أكتشفُ الخطأ:** يقولُ مالكٌ: إنَّ $\sqrt{64} = \pm 8$ ؛ لأنَّ $64 = (\pm 8)^2$. هل ما يقوله مالكٌ صحيحٌ؟ أبرِّرُ إجابتي. خطأ، لأن رمز الجذر يستعمل للدلالة على الجذر التربيعي الرئيس.

25 **أكتب:** كيف أجدُ الجذرَ التربيعيَ لعددٍ ما؟ أنظر إجابات الطلبة.

أستكشف

تمثل المعادلة $2\pi s^2 = 9.8 L$ العلاقة بين سرعة سلسلة من الموجات s بالمتري لكل ثانية في المياه العميقة، وطول الموجة L بالأمتار. أجد سرعة سلسلة من الموجات طولها الموجي 6 m ؟



فكرة الدرس

أقدر قيمة الجذر التربيعي.

المصطلحات

الجزور الصماء، إنطاق

المقام.

الجزور الصماء (surds) هي جذور لا يمكن إيجاد قيمة دقيقة لها، فمثلاً $\sqrt{3}$ جذر أصم لعدم وجود إجابة دقيقة له؛ لأن 3 ليس مربعاً كاملاً، أما $\sqrt{4}$ فيمكن إيجاد قيمة دقيقة له وهي 2 ؛ لأنه مربع كامل، إذن فهو ليس جذراً أصم. ولكن يمكن تقدير قيمة الجذور الصماء باستعمال طرائق عدّة منها: خط الأعداد، والآلة الحاسبة.

مثال 1

أقدر قيمة $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح.

الطريقة 1: خط الأعداد

الخطوة 1 أجد مربعين كاملين يقع بينهما العدد 55 ويكونان أقرب ما يمكن إليه.

• أكبر مربع كامل أقل من 55 هو 49

• أصغر مربع كامل أكبر من 55 هو 64

إذن، العدد 55 يقع بين المربعين الكاملين 49 و 64 ، ويمكن التعبير عن هذه الجملة على النحو الآتي:

$$49 < 55 < 64$$

الخطوة 2 أجد الجذر التربيعي لكل عدد.

أكتب المتباينة

$$49 < 55 < 64$$

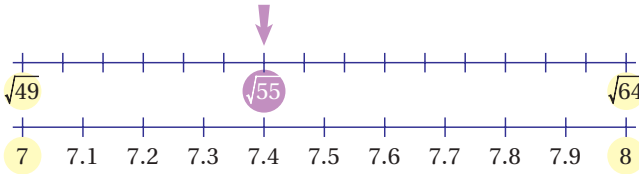
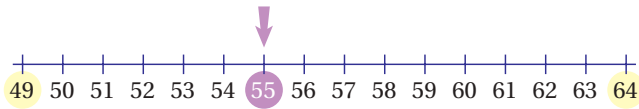
$$\sqrt{49} < \sqrt{55} < \sqrt{64}$$

$$7 < \sqrt{55} < 8$$

أجد الجذر التربيعي لكل عدد

أبسط

الخطوة 3 أستعمل خط الأعداد لتحديد أفضل تقدير.



• أعيّن الجذرين على خط الأعداد.

• ألاحظ أن 55 أقرب إلى 49 منه إلى 64

إذن، $\sqrt{55}$ أقرب إلى 7 منه إلى 8

لذا فإن أفضل تقدير لـ $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح هو 7

الطريقة 2: الآلة الحاسبة

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لتقدير $\sqrt{55}$ بالضغط على الأزرار الآتية:



إذن، أفضل تقدير لـ $\sqrt{55}$ لأقرب عدد صحيح هو 7

أتحقق من فهمي:

أقدر قيمة كل جذر تربيعي مما يأتي لأقرب عدد صحيح باستعمال خط الأعداد والآلة الحاسبة:

1 $\sqrt{83}$

9، أنظر تقدير الطلبة على خط الأعداد.

2 $\sqrt{125}$

11، أنظر تقدير الطلبة على خط الأعداد.

3 $\sqrt{160}$

13، أنظر تقدير الطلبة على خط الأعداد.

يكون المقدار الجذري في أبسط صورة حين لا يحتوي:

• جذراً في المقام.

• مجذوراً أحد عوامله مربع كامل باستثناء العدد 1

• مجذوراً على صورة كسر.

ويمكن تبسيط الجذور التربيعية الصماء باستعمال خواص ضرب الجذور التربيعية وقسمتها.

خواص ضرب الجذور التربيعية وقسمتها

• بالرموز:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{9 \times 7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

• مثال:

أعلم

لتبسيط جذر أصم على الصورة $\sqrt{a}, a \geq 0$ أحل العدد الواقع تحت رمز الجذر، على أن يكون أحدهما أكبر مربع كامل ممكنًا، ثم أطبق خاصية ضرب الجذور التربيعية.

وللحصول على مقدار جذري لا يحتوي مقامه جذرًا أصمًا، نضرب البسط والمقام في هذا الجذر الأصم، وتسمى هذه العملية **إنطاق المقام** (rationalizing the denominator).

مثال 2

أبسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{675}$

$$\begin{aligned} \sqrt{675} &= \sqrt{225 \times 3} \\ &= \sqrt{225} \times \sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

أحلل العدد 675 إلى عاملين أحدهما مربع كامل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
أبسط

2 $\sqrt{\frac{48}{81}}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{48}{81}} &= \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{\sqrt{16 \times 3}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{3}}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

خاصية قسمة الجذور التربيعية
أحلل العدد 48 إلى عاملين أحدهما مربع كامل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
أبسط

$$3 \quad \frac{14}{\sqrt{7}}$$

$$\begin{aligned} \frac{14}{\sqrt{7}} &= \frac{14}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{14\sqrt{7}}{7} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

أنطق المقام

خاصية ضرب الجذر في نفسه

أبسط

أتحقق من فهمي:



$$4 \quad \sqrt{192} \quad 8\sqrt{3}$$

$$5 \quad \sqrt{\frac{180}{25}} \quad \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$6 \quad \frac{30}{\sqrt{6}} \quad 5\sqrt{6}$$

يُستعمل تبسيط الجذور الصماء وتقديرها في كثير من المواقف الحياتية التي لا يمكن إيجاد إجابة دقيقة لها.

مثال 3: من الحياة



زراعة: اشترى سمير 6 أكياس من السماد الطبيعي يكفي الواحد منها لتغطية مساحة مقدارها 156 m^2 . أفدّر طول ضلع أكبر مربع من الأرض يمكن أن تغطيه هذه الكمية من السماد.

لتقدير طول ضلع أكبر مربع من الأرض يمكن أن تغطيه كمية السماد التي اشتراها سمير، أجد المساحة المربعة التي تغطيها كمية السماد الكلية، وذلك بضرب عدد الأكياس في مساحة ما يغطيه الكيس الواحد.

الخطوة 1 أجد المساحة المربعة التي تغطيها كمية السماد الكلية.

$$6 \times 156 = 936 \quad \text{عدد الأكياس} \times \text{مساحة ما يغطيه الكيس الواحد}$$

إذن، تغطي كمية السماد كلها مساحة مقدارها 936 m^2

الخطوة 2 أجد طول ضلع مربع الأرض الذي تغطيه كمية السماد كلها.

أفرض أن s طول ضلع مربع الأرض الذي مساحته 936 m^2

$$A = s^2 \quad \text{مساحة المربع}$$

$$s = \sqrt{A} \quad \text{طول الضلع يساوي الجذر التربيعي للمساحة}$$

الوحدة 1

أتذكر

إيجاد مربع العدد والجذر التربيعي له عمليتان عكسيتان.

$$= \sqrt{936}$$

$$= \sqrt{36 \times 26}$$

$$= \sqrt{36} \times \sqrt{26}$$

$$= 6\sqrt{26}$$

$$A = 936 \text{ أَوْض}$$

أحلل العدد 936 إلى عاملين أحدهما مربع كامل

خاصية ضرب الجذور التربيعية

أبسط

3 الخطوة 3 أفدّر طول ضلع المربع.

أستعمل الآلة الحاسبة لتقدير طول ضلع المربع:

6

$\sqrt{\quad}$

26

s \leftrightarrow d

30.59411708

إذن، طول ضلع مربع الأرض الذي تكفي لتغطيته كمية السماد التي اشتراها سميّر 30 m تقريباً.

أتتحقق من فهمي:



3.8 s



جسور: تمثل المعادلة $t = \sqrt{\frac{2d}{9.8}}$ العلاقة بين الزمن t بالثواني والارتفاع بالأمتار d الذي سقط منه جسم سقوطاً حرّاً. أجد الزمن اللازم ليصل جسم إلى سطح الأرض سقط من جسر وادي الغفر في محافظة إربد البالغ ارتفاعه عن سطح الأرض 72 m

يمكن جمع الجذور التربيعية الصّماء وطرحها بطريقة مشابهة لجمع الحدود الجبرية وطرحها، بشرط أن يتساوى المجذور في كلٍّ منها.

3 $\sqrt{5}$, 5 $\sqrt{3}$ جذران غير متشابهين

3 $\sqrt{5}$, 7 $\sqrt{5}$ جذران متشابهان

مثال 4

أبسط كلّاً ممّا يأتي:

1 $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} = \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5}$$

$$= 2 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

أحلل

خاصية ضرب الجذور التربيعية

$$\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$$

أجمع

2 $\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{12} - 6\sqrt{3} &= \sqrt{4 \times 3} - 6\sqrt{3} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= -4\sqrt{3}\end{aligned}$$

أحلل
خاصية ضرب الجذور التربيعية
 $\sqrt{4} = 2$
أطرح

3 $5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

$$\begin{aligned}5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} &= (5+2-3)\sqrt{7} \\ &= 4\sqrt{7}\end{aligned}$$

أجمع المعاملات وأطرحها
أبسط

4 $\sqrt{243} + \sqrt{48}$ $13\sqrt{3}$

5 $2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$ $-2\sqrt{3}$

6 $4\sqrt{98} + 5\sqrt{2}$ $33\sqrt{2}$

أتحقق من فهمي: 

يمكن تبسيط بعض المقادير العددية التي تحوي جذورًا صمًا وعمليًا باستعمال خاصية التوزيع وخواص ضرب الجذور التربيعية وقسمتها.

مثال 5

أبسط كلاً مما يأتي:

1 $\sqrt{3}(2 - \sqrt{7})$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(2 - \sqrt{7}) &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{7} \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{21}\end{aligned}$$

خاصية التوزيع
خاصية ضرب الجذور التربيعية

2 $(5 + \sqrt{6})^2$

$$\begin{aligned}(5 + \sqrt{6})^2 &= (5 + \sqrt{6})(5 + \sqrt{6}) \\ &= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{6} \\ &= 25 + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} + 6 \\ &= 31 + 10\sqrt{6}\end{aligned}$$

تعريف المربع الكامل
خاصية التوزيع
خاصية ضرب الجذر في نفسه
أجمع

الوحدة 1

أتحقق من فهمي:



3 $\sqrt{2}(\sqrt{8}-1) 4 - \sqrt{2}$

4 $(\sqrt{7}-3)^2 16 - 6\sqrt{7}$

أدرب وأحل المسائل

أقدر قيمة كل جذر مما يأتي لأقرب عدد صحيح باستعمال خط الأعداد والآلة الحاسبة:

1 $\sqrt{17} 4$

2 $\sqrt{44} 7$

3 $\sqrt{70} 8$

4 $\sqrt{93} 10$

أكتب كلاً من المقادير العديدة الآتية بأبسط صورة:

5 $\sqrt{405} 9\sqrt{5}$

6 $\sqrt{\frac{132}{99}} \frac{2\sqrt{3}}{3}$

7 $\frac{6}{\sqrt{18}} \sqrt{2}$

8 $(4+\sqrt{3})(5-\sqrt{27}) 11-7\sqrt{3}$

9 $4\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2} -2\sqrt{2}$

10 $\frac{1}{\sqrt{20}} + \sqrt{81} 9 + \frac{\sqrt{5}}{10}$

11 $(6+\sqrt{3})^2 39+12\sqrt{3}$

12 $\sqrt{12}-43+2\sqrt{9} 2\sqrt{3}-37$

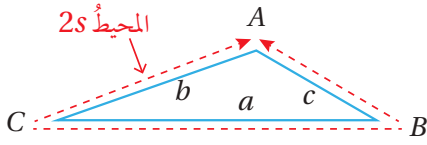
معلومة

يُعدُّ بندول الساعة أحد الاختراعات الإسلامية الكبرى التي غيرت مسار الحضارة الإنسانية. ومنذ عُرف البندول تطورت آلات حساب الوقت بسرعة.



13 **فيزياء:** تمثل الصيغة $\frac{375}{\sqrt{c}}$ عدد التذبذبات الناتجة عن حركة بندول ساعة طوله \sqrt{c} in في الدقيقة، أقدّر عدد تذبذبات بندول إذا كانت $c = 45$ in

56



مساحة: يمكن حساب مساحة مثلث باستعمال الصيغة $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ، حيث a و b و c أطوال أضلاع المثلث و s نصف المحيط.

أجد مساحة مثلث أطوال أضلاعه 6 و 8 و 10 و 24

هل مساحة المثلث الناتجة عن الفرع السابق تمثل جذراً أصمّ أم لا؟ أبرّر إجابتي. لا، لأن الإجابة 24 وهي قيمة محددة.



قواعة: يتكرّر وجود المستطيل الذهبي في قواعة نوتيلوس البحري، إذا علمت أن نسبة طول المستطيل الذهبي إلى عرضه تساوي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، فأقدر قيمة هذه النسبة. 1.6

معلومة

النسبة الذهبية هي نسبة ثابتة بين كميتين، وتظهر في الطبيعة كثيراً. ويسمى المستطيل الذي تحقق نسبة طوليه إلى عرضه هذه النسبة مستطيلاً ذهبياً.

14

15

16

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: إذا كان عدداً صحيحاً موجباً أقل من 10، فأجد قيمة حيث:

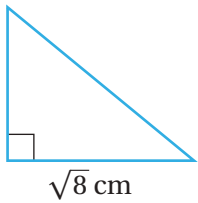
$$2.8 < \sqrt{\square} < 4$$

أية قيمة أكبر من 7.84 وأقل من 10

تحدّ: أجد الحدّين: الأول، والثاني من المتتالية الآتية:

$$-3\sqrt{5} + 4\sqrt{3}, \quad \underline{\hspace{2cm}}, \quad \sqrt{5} - 2\sqrt{3}, \quad 3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}, \quad 5\sqrt{5} - 8\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{5} + \sqrt{3}$$



تبرير: أجد ارتفاع المثلث المجاور الذي مساحته $4 + \sqrt{2} \text{ cm}^2$ بأبسط صورة، مبرراً إجابتي. $2\sqrt{2} + 1$ أنظر تبرير الطلبة.

أتذكّر

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

17

18

19

20

أكتب: كيف أقدّر قيمة الجذر التربيعي لعدد؟ أنظر إجابات الطلبة.

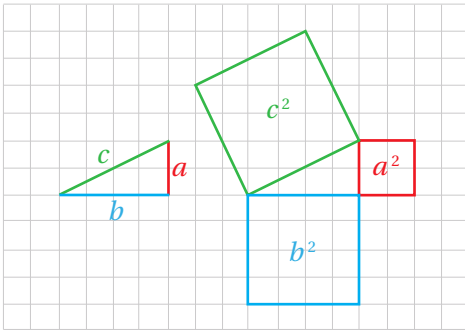


الهدف: استكشف العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

نشاط

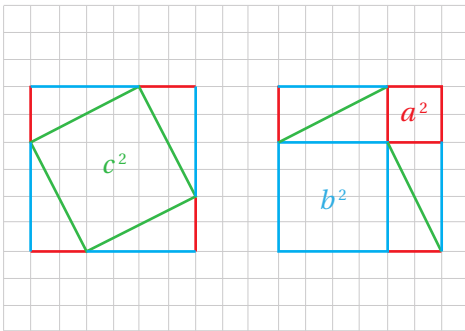
1 الخطوة الأولى: أرسم مثلثاً قائم الزاوية.

- أرسم مثلثاً قائم الزاوية على ورقة مربعات، وأسمي أقصر ضلعين a و b والضلع الأطول c ، كما في الشكل المجاور.



2 الخطوة الثانية: أرسم مربعاً على كل ضلع.

- أرسم مربعاً على كل ضلع من أضلاع المثلث، وأسمي مساحات المربعات الثلاثة: a^2 , b^2 , c^2 ، كما في الشكل المجاور.



3 الخطوة الثالثة: أقص وأعيد الترتيب.

- أقص المربعات الثلاثة.
- أنسخ من المثلث القائم الزاوية ثماني نسخ، ثم أقصها.
- أعيد ترتيب الأشكال لتكوين مربعين متطابقين كبيرين كما في الشكل المجاور.

أحلل النتائج:

- معتمداً المربعين الكبيرين المتطابقين الناتجين من النشاط؛ أصف العلاقة بين a^2 و b^2 و c^2 يساوي مجموع a^2 و b^2
- أستعمل النتيجة التي توصلت إليها في الفرع السابق لكتابة معادلة تصف العلاقة بين a^2 و b^2 و c^2 $c^2 = a^2 + b^2$

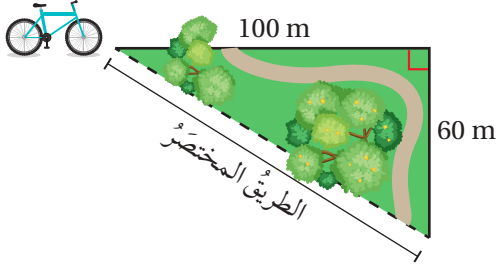
أفكر:

كيف يمكن استعمال المعادلة التي توصلت إليها في إيجاد طول الضلع الأطول في مثلث

قائم الزاوية، إذا كان طولاه الآخران 6 cm , 8 cm ؟

أنظر إجابات الطلبة.

أستكشفُ



أراد خالد الخروج من الحديقة ركباً دراجته الهوائية ماراً بالطريق المختصر كما يظهر في الشكل المجاور. ما طول الطريق المختصر؟

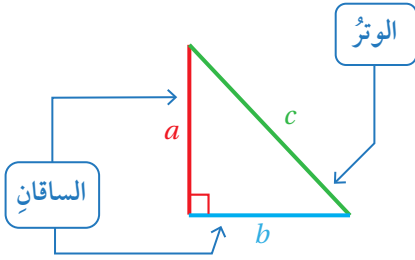


فكرة الدرس

أستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية.

المصطلحات

نظرية فيثاغورس، الوتر، الساقان، عكس نظرية فيثاغورس

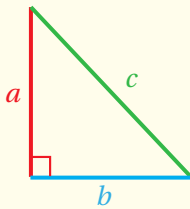


المثلث القائم الزاوية هو مثلث إحدى زواياه قائمة. ويسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة **الوتر** (hypotenuse)، وهو الضلع الأطول في المثلث. ويسمى الضلعان الآخران **الساقين** (legs)، وهما الضلعان اللذان يشكلان القائمة.

تصف **نظرية فيثاغورس** (pythagorean theorem) العلاقة بين طولي الساقين وطول الوتر في المثلث القائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس

مفهوم أساسي



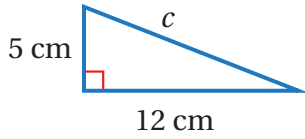
• **بالكلمات:** في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ساقيه.

• **بالرموز:** $c^2 = a^2 + b^2$

يمكن استعمال حل المعادلات ونظرية فيثاغورس في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية إذا علم طولاً ضلعيه الآخرين.

أجد طول الضلع المجهول في كل مثلث قائم الزاوية مما يأتي (أقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر):

1



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5^2 + 12^2 = c^2$$

$$25 + 144 = c^2$$

$$169 = c^2$$

$$c = \pm\sqrt{169}$$

$$= \pm 13$$

نظرية فيثاغورس

$$a = 5, b = 12 \text{ أعوّض}$$

أجد القوى

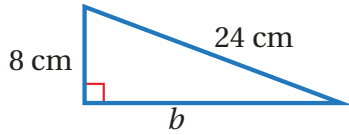
أجمع

تعريف الجذر التربيعي

أبسط

للمعادلة حلان: 13 و -13، وبما أن الطول يجب أن يكون عددًا موجبًا، إذن طول الوتر 13 cm

2



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$8^2 + b^2 = 24^2$$

$$64 + b^2 = 576$$

$$64 - 64 + b^2 = 576 - 64$$

$$b^2 = 512$$

$$b = \pm\sqrt{512}$$

$$b \approx \pm 22.6$$

نظرية فيثاغورس

$$a = 8, c = 24 \text{ أعوّض}$$

أجد القوى

أطرح 64 من كلا الطرفين

أبسط

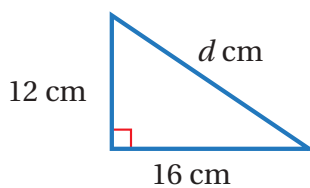
تعريف الجذر التربيعي

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، طول الضلع المجهول b يساوي 22.6 cm

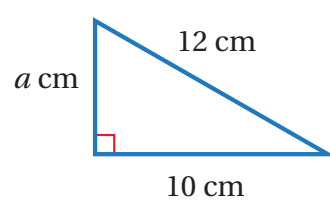
أتحقق من فهمي: ✓

3



$$d = 20$$

4



$$a \approx 6.6$$

إنَّ عكسَ نظريةِ فيثاغورس (converse of pythagorean theorem) صحيحٌ أيضًا، ويُستعملُ لتحديدِ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالَ أضلاعِهِ الثلاثةِ قائمَ الزاويةِ أم لا.

نظريةُ فيثاغورس: إذا كانَ المثلثُ قائمَ الزاويةِ، فإنَّ $c^2 = a^2 + b^2$

عكسُ نظريةِ فيثاغورس: إذا كانَ $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإنَّ المثلثُ قائمُ الزاويةِ.

عكسُ نظريةِ فيثاغورس

مفهومٌ أساسيٌّ

- **بالكلمات:** إذا كانَ مربعُ طولِ الضلعِ الأطولِ في مثلثٍ يساوي مجموعَ مربعي طولَي الضلعينِ الآخرينِ، فإنَّ المثلثُ قائمُ الزاويةِ.
- **بالرموز:** إذا كانَ $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإنَّ المثلثُ قائمُ الزاويةِ.

مثال 2

أحدُ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالَ أضلاعِهِ في كلِّ ممَّا يأتي قائمَ الزاويةِ أم لا:

1 12, 9, 15

بما أنَّ أطولَ ضلعٍ طوله 15، فأفرضُ أن $c = 15$ ، و $a = 9$ ، و $b = 12$ ، ثمَّ أحددُ أنَّ هذهِ الأطوالَ تحققُ المعادلةَ $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{نظريةُ فيثاغورس}$$

$$15^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 12^2 \quad a = 9, b = 12, c = 15 \quad \text{أعوّضُ}$$

$$225 \stackrel{?}{=} 81 + 144 \quad \text{أجدُ القوى}$$

$$225 = 225 \quad \checkmark \quad \text{أجمعُ}$$

بما أنَّ $c^2 = a^2 + b^2$ ، إذن، المثلثُ قائمُ الزاويةِ.

الوحدة 1

2 3, 5, 6

بما أن أطول ضلع طوله 6، فأفرض أن $c = 6$ ، و $a = 5$ ، و $b = 3$ ، ثمَّ أحددُ أن هذه الأطوال تحقق المعادلة $c^2 = a^2 + b^2$ أم لا.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$6^2 \stackrel{?}{=} 5^2 + 3^2$$

أعوّض $a = 5, b = 3, c = 6$

$$36 \stackrel{?}{=} 25 + 9$$

أجد القوى

$$36 \neq 34$$

أبسط

بما أن $c^2 \neq a^2 + b^2$ ، إذن، المثلث ليس قائم الزاوية.

أتحقق من فهمي:

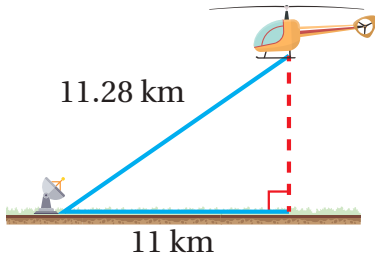


3 12, 5, 13 قائم

4 24, 18, 25 غير قائم

يمكن استعمال نظرية فيثاغورس في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3: من الحياة



رادار: رصد رادار طائرة مروحية على بُعد 11.28 km منه، كما يظهر في الشكل المجاور. أجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب جزء من العشرة من الكيلومتر.

أفرض أن a هي ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض، ولإيجاد قيمة a أستعمل نظرية فيثاغورس:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية فيثاغورس

$$11.28^2 = a^2 + 11^2$$

أعوّض $c = 11.28, b = 11$

$$127.2384 = a^2 + 121$$

أجد القوى

$$a^2 = 6.2384$$

أطرح 121 من كلا الطرفين

$$a = \pm \sqrt{6.2384}$$

تعريف الجذر التربيعي

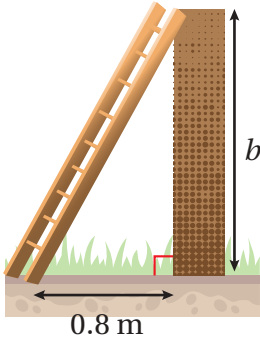
$$a \approx \pm 2.5$$

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض 2.5 km تقريباً.



أتحقّق من فهمي:

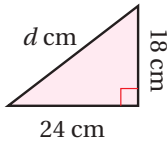


يستند سلّم طوله 2 m إلى حائطٍ عموديٍّ، وتبعدُ قاعدتهُ 0.8 m عن الحائطِ.
أجدُ ارتفاعَ أعلى السلّم عن الأرضِ (b). $b \approx 1.8$

أتحرب وأحل المسائل

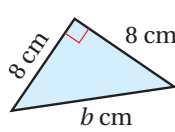
أجدُ طولَ الضلعِ المجهولِ في كلّ مثلثٍ قائمٍ الزاويةِ ممّا يأتي (أقربُ إجابتي لأقربِ جزءٍ من عشرةٍ إذا لزم الأمرُ):

1



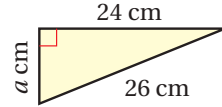
$$d = 30$$

2



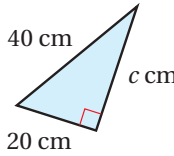
$$b \approx 11.3$$

3



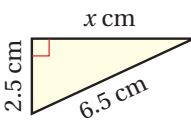
$$a = 10$$

4



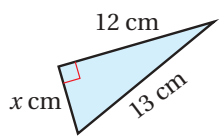
$$c \approx 34.6$$

5



$$x = 6$$

6



$$x = 5$$

أحدّد ما إذا كان المثلثُ المعطاهُ أطوالَ أضلاعِهِ في كلّ ممّا يأتي قائمَ الزاويةِ أم لا:

7

3, 4, 6

غير قائم

8

12, 35, 37

قائم

9

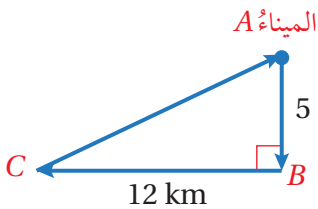
4, 8, 9

غير قائم

10

11, 60, 61

قائم



سُفُنٌ: أبحرت سفينة 5 km من الميناء A باتجاه

الجنوب، ثمّ 12 km باتجاه الغرب، ثمّ عادت

مباشرةً إلى الميناء كما في الشكل المجاور:

أجدُ المسافة التي قطعتها السفينة. 30 km

11

أجدُ المسافة التي تختصرها السفينة لو أبحرت مباشرةً من النقطة A إلى النقطة C

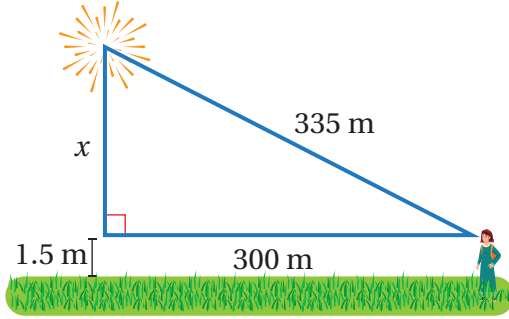
ذهابًا وإيابًا. 4 km

12

الوحدة 1

ألعاب نارية: رصدت بثينة عرضاً للألعاب النارية على بُعد 335 m مثلما يظهر في الشكل الآتي. أجد ارتفاع الألعاب النارية عن سطح الأرض.

$$x \approx 150.5 \text{ m}$$

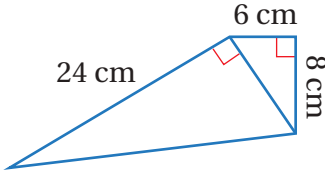


إرشاد

عند إيجاد ارتفاع الألعاب النارية عن سطح الأرض آخذ في الحسبان طول المشاهد للألعاب النارية.

13

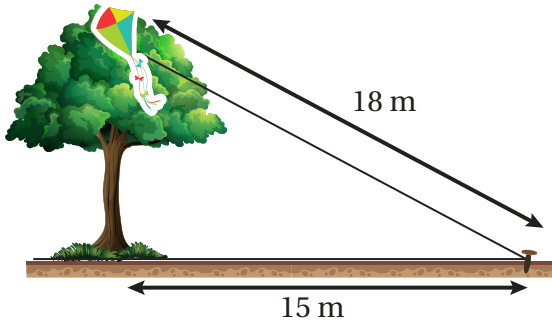
أجد محيط الشكل المجاور.



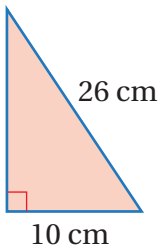
$$64 \text{ cm}$$

14

علقت طائرة عبد الله الورقية أعلى شجرة، فربط الخيط في وتد على الأرض يبعد 15 m عن قاعدة الشجرة مثلما يظهر في الشكل الآتي. إذا كان طول خيط الطائرة 18 m فأجد ارتفاع الشجرة. **9.9 m تقريباً**



15



أجد مساحة المثلث المجاور. **120 cm²**

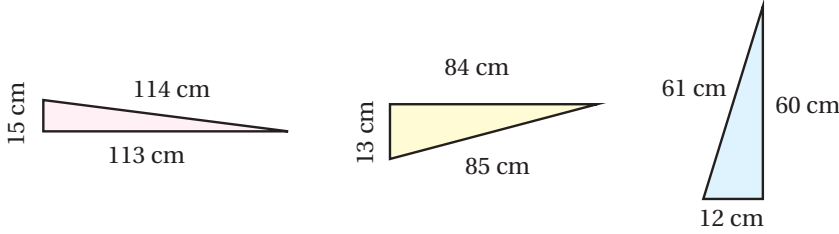
16

أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

17

$$116.6 \text{ m تقريباً}$$

18 **أكتشف المختلف:** أي المثلثات الآتية مختلف؟ أبرر إجابتي:

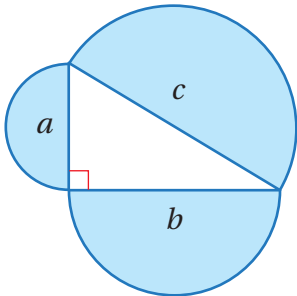
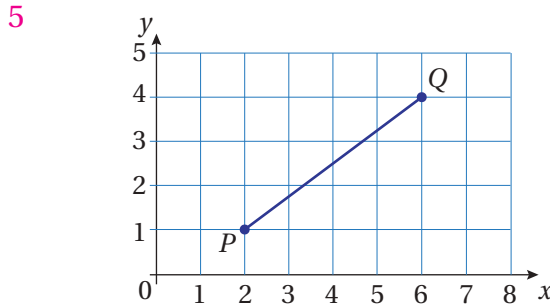


الأوسط هو المختلف لأنه قائم، أما المثلثان الآخران فليسا قائمين. أنظر تبرير الطلبة.

19 **مسألة مفتوحة:** ثلاثيات فيثاغورس هي مجموعات من ثلاثة أعداد موجبة a و b و c تحقق نظرية فيثاغورس؛ أي تشكل أطوالاً لمثلث قائم الزاوية. مثلاً: 3 و 4 و 5. أجد مجموعتين من ثلاثيات فيثاغورس.

يوجد أكثر من إجابة منها (6, 8, 10)، (5, 12, 13). أنظر إجابات الطلبة.

20 **تحذ:** في الشكل الآتي، أجد طول PQ من دون استعمال المسطرة.



21 **تبرير:** أقرن بين مساحة نصف الدائرة الكبيرة ومساحة نصفي الدائرتين الصغيرتين، مبرراً إجابتي. أنظر الهامش.

22 **أذكر**

$$A = \pi r^2$$

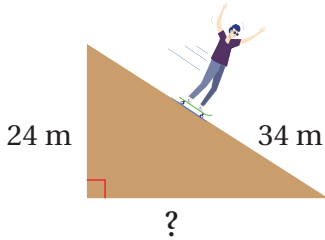
مساحة الدائرة

22 **أكتب:** كيف أجد طول ضلع مجهولاً في مثلث قائم الزاوية باستخدام نظرية فيثاغورس؟

أنظر إجابات الطلبة.

أستكشفُ

بيِّن الشكل المجاور منظرًا جانبيًّا لمنحدرٍ ترحلِق في مدينةٍ للألعابِ:



1

أجد طولَ قاعدةِ المنحدرِ.

2

هل العددُ الَّذي يمثِّل طولَ قاعدةِ

المنحدرِ عددٌ نسبيٌّ؟ أبرِّرْ إجابتي.

فكرة الدرس

أميزُ الأعدادَ النسبيةَ والأعدادَ غيرَ النسبيةِ.

المصطلحات

العددُ غيرُ النسبيِّ، العددُ الحقيقيُّ

تعلمتُ سابقًا أنَّ العددَ النسبيَّ عددٌ يمكنُ كتابتهُ على صورةِ $\frac{a}{b}$ حيثُ a و b عددانِ صحيحانِ، $b \neq 0$ ، وأنَّ الأعدادَ النسبيةَ جميعها عندَ كتابتها بالصورةِ العشريةِ تكونُ إما منتهيةً أو دوريةً، ومن أمثلتها الجذورُ التربيعيةُ للمربعاتِ الكاملةِ. ولكنَّ الجذورَ الصِّمَاءَ مثل $\sqrt{3}$ لا يمكنُ تصنيفُها أعدادًا نسبيةً؛ لأنَّه لا يمكنُ كتابتها على صورةِ كسرٍ عشريٍّ مُنتهٍ أو دوريٍّ. وعندَ استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ قيمةِ $\sqrt{3}$ تعطي الآلةُ الحاسبةُ القيمةَ الآتيةَ:

$$\sqrt{3} = 1.73205080 \dots \dots$$

وهذا يعني أنَّه غيرُ مُنتهٍ وغيرُ دوريٍّ، ويُسمَّى هذا النوعُ من الأعدادِ **الأعدادَ غيرَ النسبيةِ** (irrational numbers).

الأعدادُ غيرَ النسبيةِ

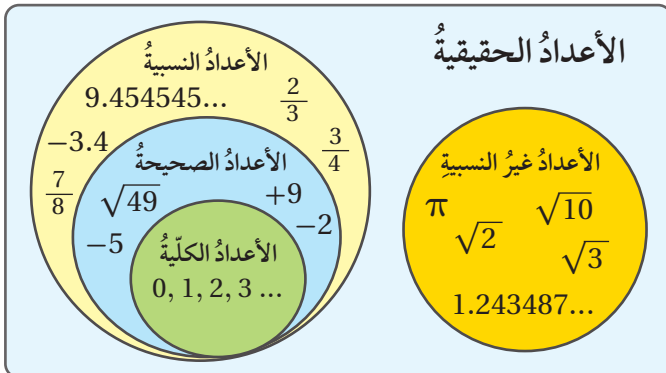
مفهومٌ أساسيٌّ

• **بالكلمات:** العددُ غيرُ النسبيِّ عددٌ لا يمكنُ كتابتهُ على صورةِ $\frac{a}{b}$ حيثُ a و b عددانِ صحيحانِ، $b \neq 0$

$$\sqrt{5} = 2.236067978 \dots \dots$$

$$\pi = 3.141592654 \dots \dots$$

• **أمثلة:**



تُشكِّل الأعدادُ النسبيةُ والأعدادُ غيرَ النسبيةِ معًا **الأعدادَ الحقيقيةِ** (real numbers)، ويوضِّحُ شكلُ (فن) المجاورُ العلاقةَ بينها.

مثال 1

أصنّف الأعداد الحقيقية الآتية أعدادًا نسبيةً أو أعدادًا غير نسبية:

1 $\frac{7}{21}$

بما أنّ 7 و 21 عددان صحيحان، إذن $\frac{7}{21}$ عددٌ نسبيٌّ.

2 $\sqrt{81}$

بما أنّ $\sqrt{81} = 9$ ، و 9 عددٌ كليٌّ، إذن $\sqrt{81}$ عددٌ نسبيٌّ.

3 $-\frac{27}{9}$

بما أنّ $-3 = -\frac{27}{9}$ ، و -3 عددٌ صحيحٌ، إذن $-\frac{27}{9}$ عددٌ نسبيٌّ.

4 0.55555... ..

بما أنّ 0.55555... .. كسرٌ عشريٌّ دوريٌّ وغيرٌ مُنتهٍ، إذن هو عددٌ نسبيٌّ.

5 $\sqrt{19}$

بما أنّ $\sqrt{19} = 4.35889894\dots$ ، وهو كسرٌ عشريٌّ غيرٌ دوريٌّ وغيرٌ منتهٍ، إذن هو عددٌ غيرٌ نسبيٌّ.

أتحقق من فهمي:

6 $\sqrt{12}$

غير نسبي

7 $-\sqrt{64}$

نسبي

8 0.181818 ...

نسبي

9 $-3\frac{2}{5}$

نسبي

تعلمت سابقًا تمثيل الأعداد النسبية على خطّ الأعداد، ويمكنني أيضًا تمثيل بعض الأعداد غير النسبية على خطّ الأعداد باستعمال المثلث القائم الزاوية.

مثال 2

أمثل $\sqrt{53}$ على خطّ الأعداد.

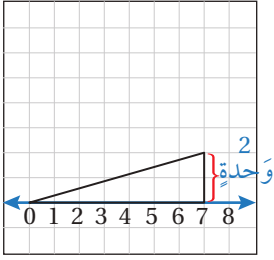
الخطوة 1 أبحث عن عددين مجموع مربعيهما 53

$$53 = 49 + 4$$

$$53 = 7^2 + 2^2$$

إذن، طول أحد ساقَي المثلث 7 وحدات وطول الآخر 2 وحدة.

الوحدة 1

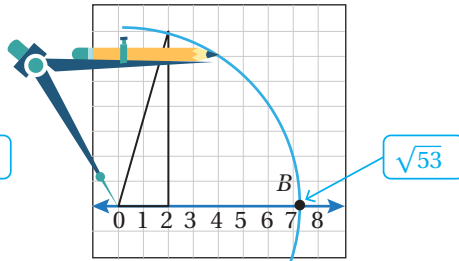
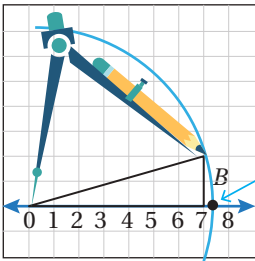


الخطوة 2 أرسم مثلثاً قائم الزاوية.

- أرسم خطاً أعدادٍ على ورقةٍ مربعةٍ.
- أرسم مثلثاً قائم الزاوية طولاً ضلعي القائمة فيه 7 وحداتٍ و 2 وحدةٍ. يمكنُ رسمُ المثلثِ بطريقتينِ مثلما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.

الخطوة 3 أعينُ $\sqrt{53}$ على خطِّ الأعدادِ.

- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مقدارها طولُ وترِ المثلثِ.
- أضعُ رأسَ الفرجارِ على 0، وأرسمُ قوساً يقطعُ خطَّ الأعدادِ في النقطةِ B.



أتحققُ من صحّة التمثيل:

ألاحظُ من التمثيلِ أنَّ $\sqrt{53} \approx 7.3$ ، وهو يتوافقُ معَ قيمةِ $\sqrt{53}$ على الآلةِ الحاسبةِ وهي:

$$\sqrt{53} \approx 7.280109889$$

أتحققُ من فهمي:

أمثلُ كلَّ عددٍ غيرِ نسبيٍّ ممَّا يأتي على خطِّ الأعدادِ: أنظر رسم الطلبة.

1 $\sqrt{5}$

الطول 2.2 وحدة تقريباً

2 $\sqrt{20}$

الطول 4.5 وحدة تقريباً

3 $\sqrt{45}$

الطول 6.7 وحدة تقريباً

يمكنُنِي المقارنةُ بينَ عددينِ حقيقيينِ بتحويلِهما إلى الصورة العشرية أولاً؛ لتسهيلِ المقارنةِ بينهما. ويمكنُنِي استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ في ذلك.

مثال 3

أضع إشارة > أو < أو = في □ لأكون عبارةً صحيحةً في كلِّ ممَّا يأتي:

1 $4\sqrt{3}$ □ $\frac{13}{2}$

الخطوة 1 أحول العددين إلى الصورة العشرية.

الخطوة 2 أقارن بين العددين.

بما أن $6.928203... > 6.5$

أستعمل الآلة الحاسبة $4\sqrt{3} \approx 6.928203... > \frac{13}{2} = 6.5$

إذن $4\sqrt{3} > \frac{13}{2}$

$\frac{13}{2} = 6.5$

2 $-\frac{1}{2}$ □ $-\sqrt{2}$

الخطوة 1 أحول العددين إلى الصورة العشرية.

الخطوة 2 أقارن بين العددين.

بما أن $-0.5 > -1.4142...$

أستعمل الآلة الحاسبة $-\frac{1}{2} = -0.5$

إذن $-\frac{1}{2} > -\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \approx -1.4142...$

3 $\frac{5}{2}$ □ $\sqrt{6.25}$

الخطوة 1 أحول العددين إلى الصيغة العشرية.

الخطوة 2 أقارن بين العددين.

بما أن $2.5 = 2.5$

أستعمل الآلة الحاسبة $\frac{5}{2} = 2.5$

إذن $\frac{5}{2} = \sqrt{6.25}$

$\sqrt{6.25} = 2.5$

أتحقق من فهمي: ✓

4 $\sqrt{0.5}$ □ 0.9

5 $-\sqrt{16}$ □ $-\sqrt{18}$

6 4.5 □ $\sqrt{20.25}$

يمكن ترتيب مجموعة من الأعداد الحقيقية تصاعدياً (من الأصغر إلى الأكبر) أو تنازلياً (من الأكبر إلى الأصغر)، وذلك بتحويل كلٍّ منها إلى الصورة العشرية أولاً؛ لتسهيل المقارنة بينها وترتيبها.

أرتب الأعداد في كلِّ مما يأتي تصاعدياً:

1 $\frac{11}{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, -1.\bar{7}$

الخطوة 1 أحول الأعداد إلى الصورة العشرية.

أحول الأعداد إلى الصيغة العشرية باستعمال الآلة الحاسبة:

$$\begin{aligned}\frac{11}{3} &= 3.6666666\dots\dots \\ -\sqrt{3} &= -1.73205\dots\dots \\ \sqrt{10} &= 3.1622\dots\dots \\ -1.\bar{7} &= -1.77777\dots\dots\end{aligned}$$

أنتعلم

يسهل تحويل الأعداد إلى الصيغة العشرية المقارنة بين الأعداد القريبة من بعضها، مثل $-\sqrt{3}$ و $-1.\bar{7}$

الخطوة 2 أقرن بين الأعداد، ثم أرتبها تصاعدياً.

الترتيب التصاعدي للأعداد هو:

$$-1.\bar{7}, -\sqrt{3}, \sqrt{10}, \frac{11}{3}$$

$-\sqrt{6}, -1.4, \frac{5}{3}, \sqrt{3}$

$-\sqrt{5}, -2, \sqrt{3}, \frac{9}{5}$

أتتحقق من فهمي:

2 $\frac{5}{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6}, -1.4$

3 $-\sqrt{5}, \frac{9}{5}, -2, \sqrt{3}$

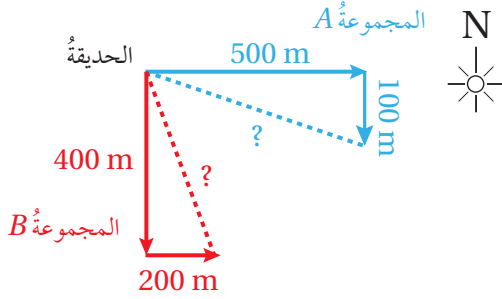
يوجد كثيرٌ من التطبيقات الحياتية والعلمية للأعداد الحقيقية.

مثال 5: من الحياة



كشافة: وقفت المجموعتان A و B من طلبة الكشافة في حديقة الشاطئ الجنوبي في العقبة، ثم بدأت المجموعتان السير في اللحظة نفسها، فسارت المجموعة A باتجاه الشرق 500 m ثم 100 m باتجاه الجنوب. وسارت المجموعة B مسافة 400 m باتجاه الجنوب ثم 200 m باتجاه الشرق. أي المجموعتين هي الأقرب إلى حديقة الشاطئ الجنوبي؟

الخطوة 1 أرسم شكلاً تقريبياً يمثل المسألة، وأحدد المطلوب.



- أعتد الاتجاهات والمسافات الموجودة في المسألة لرسم شكل تقريبياً يمثل المعطيات.
- ألاحظ أن مساري المجموعتين يصنعان مثلثين قائمي الزاوية.
- لإيجاد أي المجموعتين هي الأقرب إلى حديقة الشاطئ الجنوبي، أجد طول وتر كل مثلث، ثم أقارن بين الطولين.

الخطوة 2 أستعمل نظرية فيثاغورس.

- أستعمل نظرية فيثاغورس لأجد بُعد المجموعة A عن حديقة الشاطئ الجنوبي:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$c^2 = 500^2 + 100^2 \quad \text{أعوّض } a = 500, b = 100$$

$$c^2 = 250000 + 10000 \quad \text{أجد القوى}$$

$$c^2 = 260000 \quad \text{أجمع}$$

$$c = \pm \sqrt{260000} \quad \text{تعريف الجذر التربيعي}$$

$$\approx \pm 509.9 \quad \text{أستعمل الآلة الحاسبة}$$

إذن، بُعد المجموعة A عن حديقة الشاطئ الجنوبي 509.9 m تقريباً.

- أستعمل نظرية فيثاغورس لأجد بُعد المجموعة B عن حديقة الشاطئ الجنوبي:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$c^2 = 400^2 + 200^2 \quad \text{أعوّض } a = 400, b = 200$$

$$c^2 = 160000 + 40000 \quad \text{أجد القوى}$$

$$c^2 = 200000 \quad \text{أجمع}$$

$$c = \pm \sqrt{200000} \quad \text{تعريف الجذر التربيعي}$$

$$\approx \pm 447.2 \quad \text{أستعمل الآلة الحاسبة}$$

إذن، بُعد المجموعة B عن حديقة الشاطئ الجنوبي 447.2 m تقريباً.

الخطوة 3 أقارن بين المسافتين.

ألاحظ أن المجموعة B أقرب إلى حديقة الشاطئ الجنوبي من المجموعة A.

الوحدة 1

أتحقق من فهمي: 

جسم الإنسان: تمثل المعادلة $S = \sqrt{\frac{h \times m}{3600}}$ مساحة سطح جسم الإنسان S بالأمتار المربعة حيث h الطول بالسنتيمترات و m الكتلة بالكيلوغرامات. أجد مساحة سطح جسم شاب طوله 180 cm وكتلته 75 kg . أقرب الإجابة لأقرب جزء من عشرة. 1.9 m^2 تقريباً

أندرب وأحل المسائل

أميز العدد النسبي من غير النسبي في ما يأتي:

- 1 $-\frac{2}{3}$ نسبي 2 $\sqrt{20}$ غير نسبي 3 $5.\bar{2}$ نسبي 4 $\frac{18}{6}$ نسبي

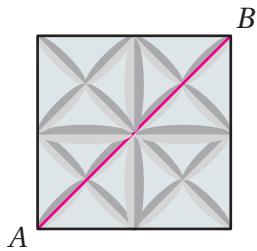
أمثل كل عدد غير نسبي مما يأتي على خط الأعداد:

- 5 $\sqrt{10}$ 6 $\sqrt{97}$ 7 $\sqrt{104}$
 انظر رسم الطلبة، الطول انظر رسم الطلبة، الطول انظر رسم الطلبة، الطول
 10.2 وحدة تقريباً 9.8 وحدة تقريباً 3.2 وحدة تقريباً
 أضع إشارة $>$ أو $<$ أو $=$ في لأكون عبارة صحيحة في كل مما يأتي:

- 8 $\sqrt{15} < 3.9$ 9 $-3.1 = -\sqrt{9.61}$ 10 $\sqrt{36} < \frac{20}{3}$

11 أرتب مجموعة الأعداد $\sqrt{30}$, 4 , $\frac{21}{4}$, $5.\bar{6}$ تنازلياً.

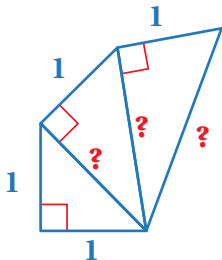
$5.\bar{6}$, $\sqrt{30}$, $\frac{21}{4}$, 4



12 بلاط: يبين الشكل المجاور بلاطة من السيراميك مربعة

الشكل طول ضلعها 15 cm ، أجد طول قطر البلاطة، ثم أحدد ما إذا كان العدد نسبياً أم غير نسبي.

$15\sqrt{2}$ ، عدد غير نسبي



13 أجد أطوال الأضلاع المجهولة في

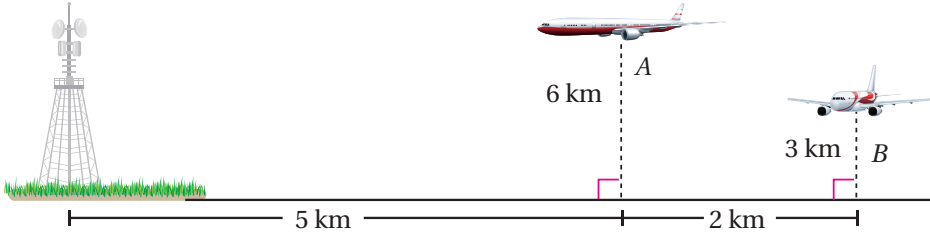
الشكل المجاور.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2

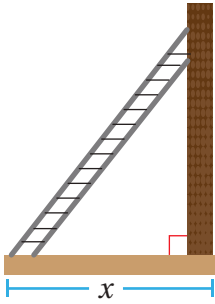
إرشاد

أستعمل نظرية فيثاغورس في الحل.

14 أي الطائرتين في الشكل الآتي أقرب إلى قاعدة البرج؟



بُعد الطائرة العليا 7.8 km تقريباً، بُعد الطائرة السفلى 7.6 km تقريباً، الطائرة السفلى أقرب.



15 إجراءات السلامة: لأضع السلم المستند إلى حائط في وضع آمن، يجب أن يكون طوله $0.3\sqrt{17x^2}$ حيث x بُعد قاعدة السلم عن الحائط بالمتر. إذا كانت قاعدة السلم تبعد عن الحائط 1.5 m، فهل طول السلم عددٌ نسبيٌّ أم غير نسبيٌّ؟

$0.3\sqrt{38.25}$ ، عدد غير نسبي

مهارات التفكير العليا

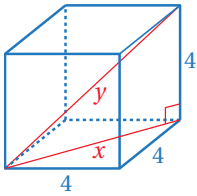
تبرير: أبين ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم غير صحيحة، مدعماً إجابتي بأمثلة مناسبة:

غير صحيحة؛ لأن $\sqrt{16}$ نسبي أما $\sqrt{6}$ غير نسبي. يوجد أمثلة أخرى.

16 الجذور التربيعية للأعداد الموجبة أعدادٌ غير نسبية.

17 العدد الحقيقي عددٌ نسبي. الأعداد العشرية المنتهية أعدادٌ نسبية. صحيحة.

غير صحيحة؛ لأن الأعداد الحقيقية مقسمة إلى نسبية وغير نسبية.



19 تحد: أجد طولَي الضلعين المجهولين في الشكل المجاور

بأبسط صورة. $x = 4\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{3}$

إرشاد

أستعمل الحقيقة (تلتقي أحرف المكعب في زوايا قائمة).

20 أكتشف الخطأ: تقول سماح: إن $\sqrt{5}$ عددٌ نسبي؛ لأنه يمكن كتابته على الصورة

$\frac{\sqrt{5}}{1}$. هل ما تقوله سماح صحيح؟ أبرر إجابتي.

غير صحيح، يجب أن يكون كل من بسط ومقام العدد النسبي عدداً صحيحاً.

21 مسألة مفتوحة: أعطي مثلاً على عددين نسبيين يقع بينهما عدداً غير نسبيين.

إجابة ممكنة: العدداً 1 و 2 نسبيان وبينهما $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ عددين غير نسبيين.

22 أكتب كيف أميز الأعداد النسبية من غير النسبية؟

أنظر إجابات الطالبة.



أستكشفُ

تمثلُ المعادلةُ $h = 0.4x^{\frac{1}{3}}$ العلاقةَ
بينَ ارتفاعِ الزرافةِ (h) بالأمتارِ وكتلتها
 x بالكيلوغراماتِ. أجدُ ارتفاعَ زرافةٍ
كتلتها 343 kg

فكرة الدرس

أربطُ بينَ الأسسِ النسبيةِ
والجذورِ، وأحوّلُ بينهما.

المصطلحات

الأسُ النسبيُّ، الجذرُ النونيُّ،
دليلُ الجذرِ.

تعلمتُ سابقاً الأسُسَ الصحيحةَ وقوانينها، وسأتعلمُ في هذا الدرسِ نوعاً آخرَ من الأسُسِ تُكتبُ على صورةِ كسورٍ تُسمى
الأسُسُ النسبيةَ (rational exponent).

معلومٌ أنَّ تربيعَ عددٍ موجبٍ وإيجادَ الجذرِ التربيعيِّ لمربعه عمليتانِ عكسيتانِ، فمثلاً:

$$3^2 = 9 \longleftrightarrow \sqrt{9} = 3$$

ومنهُ، فإنَّ العمليةَ العكسيةَ لرفعِ عددٍ للأسِ n هي إيجادُ جذره النونيِّ (n^{th} root)، ويمكنُ التعبيرُ عنَ أيِّ جذرٍ نونيِّ باستعمالِ
الأسُسِ النسبيةِ، فمثلاً يمكننا كتابةَ $\sqrt{9}$ بطريقةٍ أخرى باستعمالِ الأسُسِ النسبيةِ هي: $9^{\frac{1}{2}}$ حيثُ:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

التعالم

إذا لم يكنْ هناك دليلٌ للجذرِ
فهذا يعني أنَّ دليلَ الجذرِ 2،
وهو يدلُّ على الجذرِ التربيعيِّ.

وبشكلٍ عامٍّ، فإنَّ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ لأيِّ عددٍ صحيحٍ n أكبرُ من 1، حيثُ يُسمى العددُ
 n الموجودُ على انحناؤِ الجذرِ دليلَ الجذرِ (index) وهو يدلُّ على درجةِ الجذرِ.

$$\begin{array}{c} \text{رمزُ الجذرِ} \longleftarrow \sqrt[n]{a} \longleftarrow \text{دليلُ الجذرِ} \\ \uparrow \\ \text{المجذورُ} \end{array}$$

الأسُسُ النسبيةُ: $a^{\frac{1}{n}}$

مفهومٌ أساسيٌّ

• **بالكلمات:** لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ a ، وأيِّ عددٍ صحيحٍ n ($n > 1$)، فإنَّ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ، إلا إذا كانَ $a < 0$ و n عددًا
زوجيًا فإنَّ الجذرَ النونيَّ غيرُ معرفٍ.

• **أمثلة:** $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$ ، $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

مثال 1

أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

1 $y^{\frac{1}{4}}$

$$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

2 $\sqrt[6]{w}$

$$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

3 $8^{\frac{1}{5}}$

$$8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

4 $\sqrt[7]{-20}$

$$\sqrt[7]{-20} = (-20)^{\frac{1}{7}}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أتحقق من فهمي:



5 $c^{\frac{1}{8}} \sqrt[8]{c}$

6 $\sqrt[9]{x} \quad x^{\frac{1}{9}}$

7 $25^{\frac{1}{10}} \sqrt[10]{25}$

8 $\sqrt[3]{-12} \quad (-12)^{\frac{1}{3}}$

بشكل عام، إذا كان $a^{\frac{1}{n}} = b$ ، فإن ذلك يعني أن العامل b ضرب في نفسه n من المرات فكان الناتج a ، ويمكن استعمال هذا المفهوم لإيجاد قيم عبارات عديدة أسية من دون استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 2

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $196^{\frac{1}{2}}$

$$196^{\frac{1}{2}} = \sqrt{196}$$

$$= \sqrt{14 \times 14}$$

$$= 14$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة 196 كحاصل ضرب عامل في نفسه

أجد الجذر التربيعي للعدد

2 $(-64)^{\frac{1}{3}}$

$$(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64}$$

$$= \sqrt[3]{-4 \times -4 \times -4}$$

$$= -4$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة -64 كحاصل ضرب عامل في نفسه 3 مرات

أجد الجذر الثالث للعدد

الوحدة 1

3 $729^{\frac{1}{6}}$

$$\begin{aligned} 729^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{729} \\ &= \sqrt[6]{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

أعيد كتابة 729 كحاصل ضرب عامل في نفسه 6 مرات
أجد الجذر السادس للعدد

أتحقق من فهمي: ✓

4 $225^{\frac{1}{2}}$ 15

5 $(-243)^{\frac{1}{5}}$ -3

6 $128^{\frac{1}{7}}$ 2

يمكن تعميم العلاقة بين الأسس النسبية والجذور كما يأتي:

الأسس النسبية: $a^{\frac{m}{n}}$

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** لأي عدد حقيقي a لا يساوي صفرًا، وأي عددين صحيحين n, m و $(n > 1)$ فإن $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ إلا إذا كان $a < 0$ و n عددًا زوجيًا، فإن الجذر النوني يكون قيمة غير معرفة.

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$$

• **مثال:**

مثال 3

أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

1 $x^{\frac{3}{4}}$

$$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

2 $\sqrt[5]{b^2}$

$$\sqrt[5]{b^2} = b^{\frac{2}{5}}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

3 $30^{\frac{5}{6}}$

$$30^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{30^5}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

4 $\sqrt[7]{(-50)^2}$

$$\sqrt[7]{(-50)^2} = (-50)^{\frac{2}{7}}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

أتحقق من فهمي: ✓

5 $d^{\frac{5}{2}} \sqrt{d^5}$

6 $\sqrt[4]{b^7} b^{\frac{7}{4}}$

7 $18^{\frac{9}{5}} \sqrt[5]{18^9}$

8 $\sqrt[3]{(-16)^8} (-16)^{\frac{8}{3}}$

يمكن استعمال تعريف الأسس النسبية في إيجاد قيم عبارات عديدة أسية من دون استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 4

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $(-8)^{\frac{4}{3}}$

$$(-8)^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^4$$

$$= (-2)^4$$

$$= 16$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt[3]{(-8)} = \sqrt[3]{(-2 \times -2 \times -2)} = -2$$

أبسط

2 $(\frac{4}{9})^{\frac{5}{2}}$

$$(\frac{4}{9})^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{\frac{4}{9}})^5$$

$$= (\frac{2}{3})^5$$

$$= \frac{32}{243}$$

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{3 \times 3}} = \frac{2}{3}$$

أبسط

أتحقق من فهمي: 

3 $(32)^{\frac{3}{5}}$ 8

4 $(-\frac{27}{64})^{\frac{2}{3}}$ $\frac{9}{16}$

للأسس النسبية تطبيقات كثيرة في الحياة العملية.

مثال 5: من الحياة



أحياء: تمثل العلاقة $h = 62.5 \sqrt[3]{t} + 75.8$ ارتفاع كتف ذكّر الفيل الآسيوي h بالسنتيمترات، حيث t عمُر الفيل بالسنوات. أجد ارتفاع كتف فيل عمُرهُ 27 سنة بالأمتار.

بما أن العلاقة تعطي ارتفاع كتف الفيل بالسنتيمترات، إذن، أجد أولاً ارتفاع الكتف بالسنتيمترات، ثم أحوله إلى الأمتار.

الوحدة 1

الخطوة 1 أجد ارتفاع كتف الفيل بالسنتيمترات.

$$h = 62.5\sqrt[3]{t} + 75.8$$

العلاقة الأصلية

$$= 62.5\sqrt[3]{27} + 75.8$$

أعوّض $t = 27$

$$= 62.5(3) + 75.8$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$= 263.3$$

أبسط

إذن، ارتفاع كتف الفيل 263.3 cm

الخطوة 2 أجد ارتفاع كتف الفيل بالأمتار.

بما أن كل 1 m يساوي 100 cm، إذن، ارتفاع كتف الفيل بالأمتار 2.633 m

تحقق من فهمي:



تكنولوجيا: تصنع شركة شرائح ذاكرة صغيرة لوحدات تخزين البيانات المتنقلة (USB)،

إذا استعملت الصيغة $c = 84(n)^{\frac{2}{3}} + 910$ لحساب التكلفة c بالدينار لإنتاج n شريحة،

فأجد تكلفة إنتاج 125 شريحة ذاكرة. JD 3010

أدرب وأحل المسائل



أكتب الصورة الأسية في صورة جذرية والصورة الجذرية في صورة أسية في كل مما يأتي:

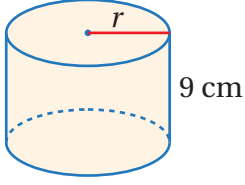
1 $p^{\frac{1}{6}} \sqrt[6]{b}$ 2 $\sqrt[8]{u} u^{\frac{1}{8}}$ 3 $9^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{9}$ 4 $\sqrt[5]{-8} (-8)^{\frac{1}{5}}$

5 $w^{\frac{8}{3}} \sqrt[3]{w^8}$ 6 $\sqrt[6]{v^5} v^{\frac{5}{6}}$ 7 $16^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{16^3}$ 8 $\sqrt[5]{(-35)^9} (-35)^{\frac{9}{5}}$

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

9 $32^{\frac{1}{5}} 2$ 10 $256^{\frac{1}{4}} 4$ 11 $(-125)^{\frac{1}{3}} -5$ 12 $4096^{\frac{1}{6}} 4$

13 $(16)^{\frac{3}{4}} 8$ 14 $(-\frac{1}{32})^{\frac{2}{5}} \frac{1}{4}$ 15 $(\frac{9}{4})^{\frac{5}{2}} \frac{243}{32}$ 16 $(-\frac{27}{8})^{\frac{5}{3}} -\frac{243}{32}$



هندسة: أجد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة المجاورة

إذا كان حجمها يساوي $2\sqrt{37} \text{ cm} \cdot 1332 \pi \text{ cm}^3$

يمكن تقدير معدل الطاقة التي تستهلكها المخلوقات الحية اعتمادًا على كتلة الجسم باستعمال المعادلة $R = 73.3 \sqrt[4]{M^3}$ التي تمثل العلاقة بين معدل الطاقة المستهلكة يوميًا R بوحدة السرعات الحرارية وكتلة الجسم M بالكيلوغرامات. أجد معدل الطاقة التي يستهلكها يوميًا خروف كتلته 16 kg **586.4** **سعة حرارية**



تصنع المسامير القياسية التي يتوافق طولها مع طول نصف قطرها لتتحمل الطرق وفق المعادلة $l = 54d^2$ التي تربط بين طول مسمار قياسي l بالإنشات وطول نصف قطره d بالإنشات أيضًا. أجد طول مسمار قياسي طول نصف قطره 0.09 in **1.46 in** تقريبًا

أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة. **2.8 m**

أتذكر

يُستعمل القانون

$V = \pi r^2 h$ لحساب

حجم الأسطوانة، حيث h ارتفاع الأسطوانة، و r طول نصف قطرها.

مهارات التفكير العليا

أكتشف الخطأ: أبين الخطأ في الحل الآتي، وأصححه.

$27^{\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^2 = 3^2 = 9$

X $27^{\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^2$
 $= 9^2$
 $= 81$

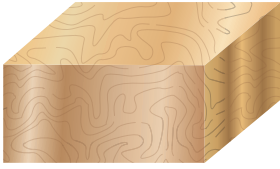
تبرير: أجد قيمة $\sqrt{4^3} - \sqrt{4}$ بأبسط صورة، مبررًا إجابتي. $\sqrt{4^3} - \sqrt{4} = 4\sqrt{4} - \sqrt{4} = 3\sqrt{4}$

مسألة مفتوحة: أجد عبارتين مختلفتين على صورة $x^{\frac{1}{n}}$ بحيث تكون أبسط صورة لهما $2x^3$ **إجابة ممكنة: $(32x^{15})^{\frac{1}{5}} = 2x^3$, $x > 0$, $(4x^6)^{\frac{1}{2}} = 2x^3$**

أكتب: كيف أحول بين الأسس النسبية والجذور؟

أنظر إجابات الطلبة.

أستكشفُ



يبيِّن الشكلُ المجاورُ صندوقًا خشبيًّا مصمَّمًا على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ طوله $x^{\frac{1}{2}}$ وحدة، وعرضه $x^{\frac{1}{3}}$ وحدة، وارتفاعه $x^{\frac{1}{4}}$ وحدة، كيفَ أجدُ حجمَ الصندوقِ بدلالةِ المتغيرِ x ؟

فكرةُ الدرسِ

استعمالُ ضربِ الأسُسِ النسبيةِ وقسمتها في إيجادِ قيمِ مقاديرٍ تحتوي أسسًا نسبيةً وتبسيطها.

تعلمتُ سابقًا مجموعةً من قوانينِ الأسُسِ الصحيحةِ:

قوانينُ الأسُسِ الصحيحةِ

مراجعةُ المفهومِ

إذا كان a و b عدديَّينِ حقيقيَّينِ و n و m عدديَّينِ صحيحينِ، فإنَّ:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ضربُ القوى

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

قسمةُ القوى

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

قوةُ القوةِ

$$(ab)^n = a^n b^n$$

قوةُ ناتجِ الضربِ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

قوةُ ناتجِ القسمةِ

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

الأسُّ الصفرِيّ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

الأسُّ السالبةُ

يظهرُ في بعضِ الأحيان قانونُ قوةِ ناتجِ القسمةِ على الصورةِ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ الَّذِي يمكنُ كتابتهُ باستعمالِ قوةٍ موجبةٍ على الصورةِ $\left(\frac{b}{a}\right)^n$. وبصورةٍ عامةٍ، لأيِّ عدديَّينِ a و b حيثُ $a, b \neq 0$ و n عددٌ صحيحٌ فإنَّ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

تنطبِقُ جميعُ قوانينِ الأسُسِ أعلاهُ على الأسُسِ النسبيةِ، ويمكنُ استعمالها لإيجادِ قيمةٍ مقدارٍ عدديٍّ يحوي أسسًا نسبيةً.

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

1 $64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}}$

$$\begin{aligned} 64^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} &= (2^6)^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \\ &= 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} \\ &= 2^{\frac{6}{5} + \frac{4}{5}} \\ &= 2^{\frac{10}{5}} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$64 = 2^6$$

قاعدة قوة القوى

قاعدة ضرب القوى

أجمع

أبسط

2 $\sqrt[3]{125 \times 5^6}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{125 \times 5^6} &= (125 \times 5^6)^{\frac{1}{3}} \\ &= (5^3 \times 5^6)^{\frac{1}{3}} \\ &= (5^9)^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

تعريف الأسس النسبية

$$125 = 5^3$$

قاعدة ضرب القوى

قاعدة قوة القوة

أبسط

أفكر

هل يمكن حل
الفرع 2 من المثال
بطريقة أخرى؟

3 $\frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[4]{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[8]{81}}{\sqrt[4]{3}} &= \frac{81^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{(3^4)^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{3^{\frac{4}{8}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} \\ &= (3)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \\ &= 3^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt[4]{3} \end{aligned}$$

تعريف الأسس النسبية

$$81 = 3^4$$

قاعدة قوة القوة

قاعدة قسمة القوى

أبسط

الصورة الجذرية

أفكر

يلزم توحيد المقامات
قبل طرح الأسس
النسبية.

الوحدة 1

4 $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{27^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{((3)^3)^{\frac{2}{3}}}{((2)^3)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{3^2}{2^2} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

قاعدة $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

قاعدة قوة ناتج القسمة

$27 = 3^3, 8 = 2^3$

قاعدة قوة القوة

أبسط

أتذكر

يمكن استعمال تعريف الأسس النسبية لحل المسألة 4 حيث:

$$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

$$8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

أتحقق من فهمي: 

5 $32^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} 8$

6 $\sqrt[4]{81 \times 2^4} 6$

7 $\sqrt[3]{\frac{243}{9}} 3$

8 $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{4}} \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$

تكون العبارة الأسية في أبسط صورة إذا كانت الأسس النسبية موجبة وبأبسط صورة في كل من البسط والمقام، ولا يظهر الأساس الواحد أكثر من مرة، وللحصول على ذلك أستعمل قوانين الأسس عند تبسيط العبارات الأسية النسبية.

العبارات الأسية في أبسط صورة

مفهوم أساسي

تكون العبارة الأسية في أبسط صورة إذا:

- ظهر كل أساس مرة واحدة وكانت الأسس جميعها موجبة.
- لم تتضمن العبارة قوة القوى.
- كانت الكسور والجذور جميعها في أبسط صورة.
- كانت الأسس في المقام صحيحة موجبة.

أبسطُ كلًّا من العبارَاتِ الأُسِّيَّةِ الآتِيَةِ مفترضًا أنَّ أيًّا من المتغيَّراتِ لا يساوي صفرًا:

1 $y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}$

$$y^{-\frac{2}{3}} \times y^{\frac{5}{3}} = y^{-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}}$$

$$= y^{\frac{3}{3}}$$

$$= y$$

قاعدة ضرب القوى

أجمع الأسس

أبسطُ

2 $\frac{w^{\frac{7}{2}}}{w^3}$

$$\frac{w^{\frac{7}{2}}}{w^3} = (w)^{\frac{7}{2}} \times w^{-3}$$

$$= (w)^{\frac{7}{2} - 3}$$

$$= w^{\frac{1}{2}}$$

قاعدة الأسس السالبة

قاعدة ضرب القوى

أبسطُ

3 $(b^{\frac{3}{7}})^7$

$$(b^{\frac{3}{7}})^7 = b^{\frac{3}{7} \times 7}$$

$$= b^3$$

قاعدة قوة القوة

أبسطُ

أتحقَّق من فهمي: 

4 $y^{\frac{4}{5}} \times y^{-\frac{9}{5}} = \frac{1}{y}$

5 $\frac{u^{-\frac{7}{2}}}{u^{-4}} = (u)^{\frac{1}{2}}$

6 $(d^{-\frac{2}{3}})^6 = \frac{1}{d^4}$

يمكنُ توظيفُ قوانينِ ضربِ الأسسِ النسبيةِ وقسمتها في مواقفَ حياتيةٍ متنوعةٍ.



مثال 3: من الحياة



يمكنُ حسابُ مساحةِ سطحِ جسمِ الحيواناتِ الثدييةِ بالصيغةِ $S = 9.75 m^{\frac{2}{3}}$ حيثُ S مساحةُ السطحِ بالسنتيمترِ المربعِ، و m كتلةُ الحيوانِ بالغرامِ. أجدُ مساحةَ سطحِ جسمِ أرنبٍ كتلتهُ 3.4×10^3 غرامًا، وأقربُ الإجابةَ لأقربِ عددٍ صحيحٍ.

لإيجادِ مساحةِ سطحِ جسمِ الأرنبِ أ عوضُ كتلتهُ في الصيغةِ:

$$S = 9.75 m^{\frac{2}{3}}$$

الصيغةُ الأصليةُ

$$S = 9.75 \times (3.4 \times 10^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$m = 3.4 \times 10^3 \text{ عوضُ}$$

$$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times (10^3)^{\frac{2}{3}}$$

قاعدةُ ضربِ القوى

$$= 9.75 \times 3.4^{\frac{2}{3}} \times 10^2$$

قاعدةُ قوةِ القوةِ

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ:

$$9.75 \times 3.4 \times (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}} \times 10^2 = 2204.570003$$

إذن، مساحةُ سطحِ جسمِ الأرنبِ 2205 cm^2 تقريبًا.

أتحقق من فهمي:



تمثلُ المعادلةُ $A = (4\pi)^{\frac{1}{3}} (3V)^{\frac{2}{3}}$ مساحةَ سطحِ كرةٍ بالوحداتِ المربعةِ تَمَّ تشكيلها باستعمالِ مجموعةٍ من كراتٍ صغيرةٍ حجمُ الواحدةِ منها V وحدةٍ مكعبةٍ. أجدُ مساحةَ السطحِ الخارجيِّ للكرةِ الكبيرةِ إذا كانَ حجمُ الكرةِ الصغيرةِ 9 وحداتٍ مكعبةٍ. 21 وحدةٍ مكعبةٍ تقريبًا.

أُتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي في أبسط صورة:

1 $25^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$ 25

2 $\sqrt[6]{64 \times 3^{12}}$ 18

3 $\frac{9^{\frac{5}{2}}}{27^{\frac{2}{3}}}$ 27

4 $\frac{\sqrt[3]{216}}{36^{-\frac{3}{2}}}$ 1296

5 $\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{512}{125}$

6 $\left(\frac{2187}{128}\right)^{-\frac{5}{7}}$ $\frac{32}{243}$

أبسط كلاً من العبارات الآتية مفترضاً أنَّ أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

7 $p^{-\frac{3}{4}} \times p^{\frac{11}{4}}$ p^2

8 $\frac{u^{-\frac{8}{3}}}{u^{-3}}$ $(u)^{\frac{1}{3}}$

9 $y^6(y^{\frac{3}{2}})^{-2}$ y^3

10 $\frac{1}{n^2} y^{-2} (n^{\frac{5}{3}})^6$ $\frac{n^8}{y^2}$

11 $\frac{w^2 \times w^{-\frac{9}{2}}}{w^{-3}}$ $(w)^{\frac{1}{2}}$

12 $d^{-\frac{1}{2}} \times d^{-\frac{3}{2}}$ $\frac{1}{d^2}$



أعاصير: يستعمل العلماء المعادلة

$$s = \sqrt{9.8d}$$

بالمتر لكل ثانية في أثناء إعصار تسونامي، حيث d عمق الماء بالأمتار. أقدِّر سرعة

الموجة حين يكون عمق الماء 4000 m

تقريباً. 198 m/s

معلومة

تسونامي هُو مجموعة من الأمواج الكبيرة جداً تنتج من تحريك كمّية هائلة من مياه المحيطات بفعل الظواهر المفاجئة، مثل الزلازل.

الوحدة 1

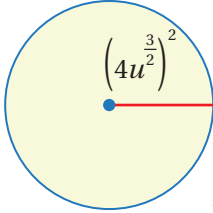
أعودُ إلى فقرة (أستكشف) بدايةً الدرس، وأجد:

حجم الصندوق بدلالة x . $x^{\frac{13}{12}}$

مساحة المساحة الكلية لسطح الصندوق إذا كانت $x = 4096$ 3328

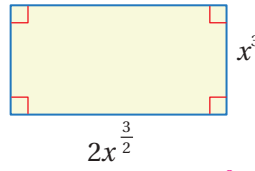
هندسة: أجد مساحة كل شكل مما يأتي:

16



$256\pi u^6$

17



$2x^{\frac{9}{2}}$

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب 4 مقادير مكافئة للمقدار $(x^{\frac{2}{3}})^3$

إجابات ممكنة: $x^2, (x^4)^{\frac{1}{2}}, \sqrt[6]{x^3}, (x^{10})^{\frac{1}{5}}$

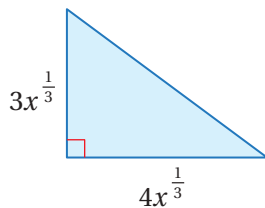
أكتشف الخطأ: أبين الخطأ في الحل الآتي، وأصححه:

بما أن دليل الجذر زوجي، والمجذور سالب؛ فإن الجذر غير معرف.

$$\begin{aligned} (-81)^{\frac{3}{4}} &= ((-81)^{\frac{1}{4}})^3 \\ &= (-3)^3 \\ &= -27 \end{aligned}$$

تحدّ: أجد محيط المثلث في الشكل الآتي.

$12x^{\frac{1}{3}}$

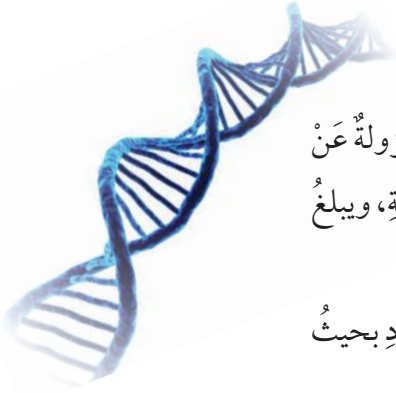


أفكر

كيف أجد طول الضلع الثالث في المثلث لأجد المحيط؟

أكتب: كيف أستعمل قوانين الأسس النسبية في إيجاد قيم مقادير تحتوي أسسًا

نسبية وتبسيطها؟ أنظر إجابات الطلبة.



أستكشف

الأحماض النووية (DNA) هي جزيئات مسؤولة عن تخزين المعلومات الوراثية في الكائنات الحية، ويبلغ قطرها 0.000000002 m تقريباً. هل توجد طريقة أخرى لكتابة هذا العدد بحيث تصبح قراءته أسهل؟



فكرة الدرس

أكتب الأعداد الكلية والعشرية بالصيغة العلمية، وأجري عمليتي الضرب والقسم عليها.

المصطلحات

الصيغة العلمية

أذكر

تسمى الصيغة التي تكتب بها الأعداد من دون استعمال الأسس الصيغة القياسية.

الصيغة العلمية (scientific notation) هي طريقة لكتابة الأعداد الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً على صورة حاصل ضرب عددين أحدهما أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10، والآخر أحد قوى العدد 10

الصيغة العلمية

مفهوم أساسي

يكتب العدد بالصيغة العلمية على الصورة $a \times 10^n$ ، حيث $1 \leq a < 10$ ، n عدد صحيح.

• بالكلمات:

$$2 \times 10^8, 1.9 \times 10^{-3}, 6.35 \times 10^4$$

• أمثلة:

مثال 1 أكتب كل عدد في ما يأتي بالصيغة العلمية:

1

1 12300000

1 الخطوة 1 أحرّك الفاصلة العشرية.

أحرّك الفاصلة العشرية إلى اليسار حتى ينتج عدد أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10:

1 2 3 0 0 0 0 0 .

1.23

أحرّك الفاصلة العشرية 7 منازل إلى اليسار

أحذف الأصفار الإضافية

إذن، العدد بعد تحريك الفاصلة 1.23

الوحدة 1

الخطوة 2 أحدد قوة العدد 10

بما أن الفاصلة العشرية تحركت 7 منازل إلى اليسار؛ فإن $n = 7$

إذن، قوة العدد 10 هي 10^7

الخطوة 3 أضرب العددين الناتجين من الخطوتين 1 و 2

$$12300000 = 1.23 \times 10^7$$

2 0.000729

الخطوة 1 أحرك الفاصلة العشرية.

أحرك الفاصلة العشرية إلى اليمين حتى ينتج عدد أكبر من أو يساوي 1 وأقل من 10:

$$0.000729$$

$$7.29$$

أحرك الفاصلة العشرية 4 منازل إلى اليمين

أحذف الأصفار الإضافية

إذن، العدد بعد تحريك الفاصلة 7.29

الخطوة 2 أحدد قوة العدد 10

بما أن الفاصلة العشرية تحركت 4 منازل لليمين؛ فإن $n = -4$

إذن، قوة العدد 10 هي 10^{-4}

الخطوة 3 أضرب العددين الناتجين من الخطوتين 1 و 2

$$0.000729 = 7.29 \times 10^{-4}$$

أتحقق من فهمي: 

3 7864

$$7.864 \times 10^3$$

4 4277.38

$$4.27738 \times 10^3$$

5 0.00000874

$$8.74 \times 10^{-6}$$

6 0.002

$$2 \times 10^{-3}$$

ويمكننا أيضًا تحويل الأعداد من الصيغة العلمية إلى الصيغة القياسية.

مثال 2

اكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة القياسية:

1 7.51×10^5

الخطوة 1 أسّ العدد 10 وإشارته لتحديد عدد المنازل العشرية التي أحرّك الفاصلة العشرية بعدها واتجاه الحركة.

أسّ العدد 10 هو 5، إذن $n = 5$ ، وبما أن $n > 0$ ، إذن أحرّك الفاصلة العشرية 5 منازل لليمين.

أتعلم

أحرّك الفاصلة العشرية إلى اليمين عددًا من المنازل يساوي قيمة n ، أما إذا انتهت المنازل العشرية في العدد العشري، فأضع صفرًا أو أكثر يمين آخر رقم حتى يكتمل العدد المطلوب من المنازل.

$$7.51 \times 10^5 \longrightarrow 7.51000$$

إذن، العدد 7.51×10^5 بالصيغة القياسية هو 751000.

الخطوة 2 أحرّك الفاصلة العشرية.

2 6.8×10^{-8}

الخطوة 1 أسّ العدد 10 وإشارته لتحديد عدد المنازل العشرية التي أحرّك الفاصلة العشرية بعدها واتجاه الحركة.

أسّ العدد 10 هو -8، إذن $n = -8$ ، وبما أن $n < 0$ ، إذن أحرّك الفاصلة العشرية 8 منازل لليسار.

أتعلم

أحرّك الفاصلة العشرية إلى اليسار عددًا من المنازل يساوي قيمة n ، أما إذا انتهت المنازل العشرية في العدد العشري، فأضع صفرًا أو أكثر يسار آخر رقم حتى يكتمل العدد المطلوب من المنازل.

$$6.8 \times 10^{-8} \longrightarrow 00000006.8$$

إذن، العدد 6.8×10^{-8} بالصيغة القياسية هو 0.000000068.

أتحقق من فهمي: 

3 6.432×10^6

6432000

4 3.45×10^{-2}

0.0345

5 7×10^{-4}

0'0007

6 8×10^3

8000

الوحدة 1

يمكن مقارنة الأعداد المكتوبة بالصيغة العلمية وترتيبها، وذلك بمقارنة أسس العدد 10 أولاً، ثم مقارنة الجزء العشري.

مثال 3

أرتب الأعداد في كل مما يأتي تصاعدياً:

1 3.9×10^6 , 4.2×10^5 , 3.8×10^6

الخطوة 2 أقرن الجزء العشري.

الأكبر $\rightarrow 3.9 \times 10^6$

3.8×10^6

بما أن $3.9 > 3.8$

إذن، 3.9×10^6 هو الأكبر.

الخطوة 1 أقرن بين أسس العدد 10

3.9×10^6

الأصغر $\rightarrow 4.2 \times 10^5$

3.8×10^6

بما أن $10^5 < 10^6$

إذن 4.2×10^5 هو الأصغر.

إذن، الترتيب التصاعدي للأعداد الثلاثة هو:

4.2×10^5 , 3.8×10^6 , 3.9×10^6

أنتحقق من فهمي: 

2 7.8×10^{-3} , 7.9×10^{-3} , 5.6×10^{-4} , 5.6×10^{-4} , 7.8×10^{-3} , 7.9×10^{-3}

يمكن استعمال الصيغة العلمية لتسهيل عملية ضرب الأعداد الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً وقسمتها.

مثال 4

أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7)$

$(3.4 \times 10^{-4})(6 \times 10^7) = (3.4 \times 6)(10^{-4} \times 10^7)$

$= 20.4 \times 10^3$

$= (2.04 \times 10^1) \times 10^3$

$= 2.04 \times 10^4$

الخاصيتان: التجميعية، والتبديلية

قاعدة ضرب القوى

$20.4 = 2.04 \times 10^1$

قاعدة ضرب القوى

2 $(6.561 \times 10^{-4}) \div (7.29 \times 10^7)$

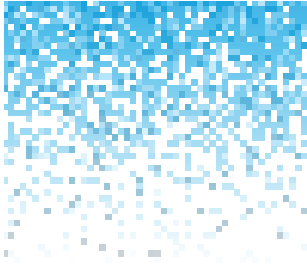
$$\begin{aligned} (6.561 \times 10^{-4}) \div (7.29 \times 10^7) &= \frac{(6.561 \times 10^{-4})}{(7.29 \times 10^7)} \\ &= \left(\frac{6.561}{7.29} \right) \left(\frac{10^{-4}}{10^7} \right) && \text{الخاصيتان: التجميعية، والتبديلية} \\ &= 0.9 \times 10^{-11} && \text{قاعدة قسمة القوى} \\ &= (9 \times 10^{-1}) \times 10^{-11} && 0.9 = 9 \times 10^{-1} \\ &= 9 \times 10^{-12} && \text{قاعدة ضرب القوى} \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي: ✓

3 $(5.6 \times 10^{11})(2.8 \times 10^{-14})$ 1.568×10^{-2} 4 $(1.305 \times 10^5) \div (1.45 \times 10^8)$ 9×10^{-4}

تُستعمل الصيغة العلمية في كثير من المواقف الحياتية.

مثال 5: من الحياة



البِكْسَلُ: البِكْسَلُ هُوَ أَصْغَرُ عُنْصُرٍ يُمْكِنُ رُؤْيَتُهُ فِي الصُّورَةِ الرَّقْمِيَّةِ عَلَى الشَّاشَاتِ، وَهُوَ عَلَى شَكْلِ مَسْتَطِيلٍ طَوْلُهُ 2×10^{-2} cm وَعَرْضُهُ 7×10^{-3} cm أَجْدُ مَسَاحَةٍ الْبِكْسَلِ بِالصِّيغَتَيْنِ: الْقِيَاسِيَّةِ، وَالْعِلْمِيَّةِ.

$$\begin{aligned} A &= l \times w && \text{قانون مساحة المستطيل الذي طوله } l \text{ وعرضه } w \\ A &= (2 \times 10^{-2}) (7 \times 10^{-3}) && \text{أعوّض } l = 2 \times 10^{-2} \text{ و } w = 7 \times 10^{-3} \\ &= (2 \times 7) (10^{-2} \times 10^{-3}) && \text{الخاصيتان: التبديلية، والتجميعية} \\ &= 14 \times 10^{-5} && \text{قاعدة ضرب القوى} \\ &= (1.4 \times 10^1) \times 10^{-5} && 14 = 1.4 \times 10^1 \\ &= 1.4 \times 10^{-4} && \text{قاعدة ضرب القوى} \\ &= 0.00014 && \text{الصيغة القياسية} \end{aligned}$$

إذن، مساحة البِكْسَلِ بِالصِّيغَةِ الْقِيَاسِيَّةِ 0.00014، وبالصيغة العلمية 1.4×10^{-4}

الوحدة 1



أتحقق من فهمي:

يحتوي جسم الإنسان البالغ 20 000 000 000 000 خلية دم حمراء تقريباً وكتلة الخلية الواحدة 1 g 0.000 000 000
أكتب كلاً من هذين العددين بالصيغة العلمية، ثم أجد كتلة خلايا الدم الحمراء جميعها لدى الإنسان البالغ.
 2×10^{13} , 1×10^{-10} , 2×10^3

أتحرب وأحل المسائل

أكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة العلمية:

1 $250 \ 2.5 \times 10^2$

2 $20\ 780\ 000\ 000$
 2.078×10^{10}

3 56.0045
 5.60045×10^1

4 0.00076
 7.6×10^{-4}

أكتب كل عدد مما يأتي بالصيغة القياسية:

5 2.46×10^2 246

6 8.97×10^5 897000

7 5.67×10^{-4} 0.000567

8 2.0789×10^{-2} 0.020789

أرتب الأعداد الآتية تصاعدياً:

6.25×10^{-1} , 2.8×10^5 , 4.5×10^5 , 2.07×10^{-2} , 6.3×10^{-1}

2.07×10^{-2} , 6.25×10^{-1} , 6.3×10^{-1} , 2.8×10^5 , 4.5×10^5

أجد ناتج كل مما يأتي:

10 $(7.3 \times 10^{-3})(4 \times 10^2)$ 2.92

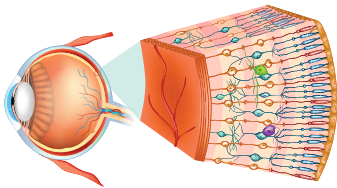
11 $(2 \times 10^{-2})^3$ 8×10^{-6}

12 $(4.8 \times 10^4) \div (3 \times 10^4)$ 1.6

13 $\sqrt{(36 \times 10^{-4})}$ 6×10^{-2}

معلومة

تعمل شبكية العين على تحويل الأشعة الضوئية إلى نبضات عصبية (كهروكيميائية) تُنقل عبر العصب البصري إلى مراكز الدماغ العليا لتحويلها إلى صور للأشياء المرئية.




تشرح: تحتوي شبكية العين خلايا مستقبلية

للضوء وحساسة له تُسمى عصياً ومخاريط، إذ يبلغ عدد العصي في الشبكية 120000000،

وعدد المخاريط 6000000، أكتب كلاً من هذين العددين بالصيغة العلمية.

1.2×10^8 , 6×10^6

15 يُبين الجدول الآتي أبعاد بعض الكواكب عن الشمس، أرتب هذه الأبعاد تنازلياً.



بُعد الكوكب عن الشمس						
المشتري	الزهرة	عطارد	نبتون	المريخ	الأرض	الكوكب
4.84×10^8	6.7×10^7	3.6×10^7	2.8×10^9	1.42×10^8	9.3×10^7	البعد بالأميال

نبتون، المشتري، المريخ، الأرض، الزهرة، عطارد.

16 **كثافة سكانية:** تُحسب الكثافة السكانية لمنطقة ما بقسمة عدد السكان على مساحة هذه المنطقة. في شهر آب من عام 2020 كان عدد سكان الأرض 7.8×10^9 نسمة. إذا كانت مساحة سطح اليابسة على الأرض $1.438 \times 10^9 \text{ km}^2$ ، فأجد الكثافة السكانية لسكان الأرض على اليابسة. **5.4 تقريباً.**

17 **نباتات:** تبلغ كتلة الولفية (Wolffian globose) $1.5 \times 10^{-4} \text{ g}$ إذا احتوت ملعقة صغيرة 5×10^3 نبات ولفية تقريباً، فأجد كتلة هذه الكمية. **7.5×10^{-1}**



معلومة

الولفية نوع من عدسيات الماء، وتُعد أصغر النباتات المزهرة، وتتكاثر بسرعة كبيرة لتحوّل سطح الماء إلى ما يشبه المرج الأخضر.

مهارات التفكير العليا

18 **تبرير:** أيهما أكبر: 1000^{10} أم 10^{1000} ؟ أبرر إجابتي. **10^{1000} أكبر لأن $10^{1000} = 1000^{10}$**

19 **أكتشف الخطأ:** حل كل من سعد وهدى مسألة قسمة مكتوبة بالصيغة العلمية على النحو الآتي، من منهُما حلّه صحيح؟ أبرر إجابتي.

هدى	سعد
$\frac{3.12 \times 10^{-4}}{6 \times 10^8} = 0.52 \times 10^{-12}$	$\frac{3.12 \times 10^{-4}}{6 \times 10^8} = 0.52 \times 10^{-12}$
$= 5.2 \times 10^{-11}$	$= 5.2 \times 10^{-13}$

حل سعد صحيح لأن $0.52 \times 10^{-12} = 5.2 \times 10^{-13}$

20 **مسألة مفتوحة:** أكتب عددين بالصيغة العلمية ناتج ضربهما 7.2×10^5 ، ثم عددين

بالصيغة العلمية ناتج قسمتهما 7.2×10^5

إجابة ممكنة، ضرب: $(2.4 \times 10^3) \times (3 \times 10^2)$ ، قسمة: $(1.44 \times 10^8) \div (2 \times 10^2)$

21 **أكتب** كيف أكتب الأعداد الكلية والعشرية بالصيغة العلمية؟

أنظر إجابات الطلبة.

أستكشف

فكرة الدرس

أحل مسائل على النسبة المئوية.

المصطلحات

النسبة المئوية للتغير، نسبة الزيادة
المئوية، نسبة النقصان المئوية،
النسبة المئوية العكسية



في عام 2018 أنتج الأردن 21 ألف طن من زيت الزيتون، وفي عام 2019 أنتج 119% مما أنتجته عام 2018. ما معنى النسبة 119%؟
وكم أنتج الأردن من الزيت عام 2019؟

أتذكر

لإيجاد النسبة المئوية من كمية،
أحوّل النسبة المئوية إلى كسر
أو كسر عشري، ثم أضرب
الكسر الناتج في الكمية.

النسبة المئوية هي نسبة تقارن عدداً بالعدد 100، فإذا كان العدد أكبر من 100، فإن النسبة المئوية تكون أكبر من 100%، أما إذا كان العدد الذي أقرن به أقل من 1، فإن النسبة المئوية تكون أقل من 1%.

مثال 1

أجد قيمة كل مما يأتي:

1 150% من 5

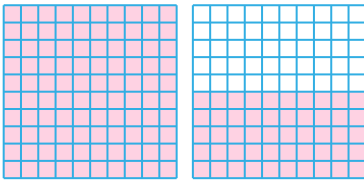
أضرب النسبة المئوية في العدد
أحوّل النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن 150% من 5 تساوي 7.5

2 0.7% من 2000

أضرب النسبة المئوية في العدد
أحوّل النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن 0.7% من 2000 تساوي 14

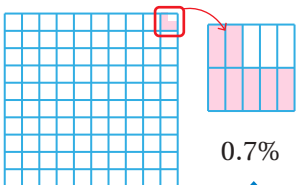


150%

$$\begin{aligned} 150\% \times 5 \\ = 1.5 \times 5 \\ = 7.5 \end{aligned}$$

أتعلم

150% تعني 100% + 50%



0.7%

$$\begin{aligned} 0.7\% \times 2000 \\ = 0.007 \times 2000 \\ = 14 \end{aligned}$$

0.7% هي نسبة كسرية بين 0% و 1%

أتتحقق من فهمي:



4 0.1% من 5000 5

3 350% من 10 35

يوجد الكثير من التطبيقات الحياتية المهمة على النسبة المئوية.

مثال 2: من الحياة



1 **راتب:** تتقاضى فاطمة راتباً شهرياً قدره JD 750، كم يصبح هذا الراتب إذا زاد بنسبة 12%؟
إن زيادة الراتب بنسبة 12% تكافئ نسبة 100% الأصلية مضافاً إليها 12%، وهذا يعني أن المجموع الكلي للنسب 112%، ومن ثم، فإنه يمكن إيجاد راتب فاطمة بعد الزيادة بضرب الراتب القديم في 112%

أفكر

هل يمكن إيجاد راتب فاطمة بعد الزيادة بطريقة أخرى؟

$$\begin{aligned} 112\% \times 750 \\ = 1.12 \times 750 \\ = 840 \end{aligned}$$

أضرب النسبة المئوية في الكمية الأصلية
أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن، راتب فاطمة بعد الزيادة JD 840



2 **سيارة:** اشترى كريم سيارة بمبلغ JD 6500 العام الماضي، كم يصبح السعر إذا انخفض سعر السيارة هذا العام بنسبة 15%؟

إن انخفاض سعر السيارة بنسبة 15% يكافئ نسبة 100% الأصلية مطروحاً منها 15%، وهذا يمثل 85% من السعر الأصلي؛ لذا يمكن إيجاد سعر السيارة بعد الانخفاض بضرب سعرها القديم في 85%

أفكر

هل يمكن إيجاد سعر السيارة بعد النقصان بطريقة أخرى؟

$$\begin{aligned} 85\% \times 6500 \\ = 0.85 \times 6500 \\ = 5525 \end{aligned}$$

أضرب النسبة المئوية في الكمية الأصلية
أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري
أضرب

إذن، سعر السيارة هذا العام JD 5525

أتحقق من فهمي:



3 ازداد طول نبتة بنسبة 25% ممّا كان عليه طولها قبل أسبوعٍ. أجد طول النبتة الآن إذا كان طولها في الأسبوع السابق 40 cm 50

4 قرّرت إدارة أحد المصانع تخفيض عدد عمّالها بتسريح 30% منهم. إذا كان عدد العمال في المصنع 416 عاملاً، فكّم عاملاً سيبقى في المصنع؟ 291

النسبة المئوية للتغير (percentage change) (pc) هي النسبة المئوية لمقدار التغير من الكمية الأصلية، ويمكن أن تكون النسبة المئوية للتغير نسبة زيادة مئوية (percentage increase) أو نسبة نقصان مئوية (percentage decrease)

النسبة المئوية للتغير

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** النسبة المئوية للتغير هي النسبة المئوية بين التغير في كمية ما والكمية الأصلية.

$$(النسبة المئوية للتغير) = \frac{(مقدار التغير)}{(الكمية الأصلية)} \times 100\%$$

مثال 3: من الحياة



1 **آلة حاسبة:** باع محلّ للإلكترونيات 80 آلة حاسبة في شهر أيلول، و104 آلات حاسبة في شهر تشرين الأول. أجد النسبة المئوية للتغير في عدد الآلات الحاسبة المباعة من شهر أيلول إلى شهر تشرين الأول.

الخطوة 1 أجد مقدار التغير.

ألاحظ أن التغير زيادة؛ لذا أطرح الكمية الأصلية من الكمية الجديدة لأجد مقدار التغير.

$$104 - 80 = 24$$

الكمية الجديدة - الكمية الأصلية

إذن، مقدار التغير يساوي 24

الخطوة 2 أجد النسبة المئوية للتغير.

$$\text{نسبة التغير المئوية} = \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{الكمية الأصلية}} \times 100\% = (\text{النسبة المئوية للتغير})$$

$$= \frac{24}{80} \times 100\% \quad \text{أعوّض مقدار التغير = 24، الكمية الأصلية = 80}$$

$$= \frac{3}{10} \times 100\% \quad \text{أبسط}$$

$$= 30\% \quad \text{أضرب}$$

إذن، زادت المبيعات من شهر أيلول إلى شهر تشرين الأول بنسبة 30%



2 إذا كانت كتلة عمر 95 kg قبل اتباعه نظامًا غذائيًا متوازنًا، وأصبحت كتلته الآن 78 kg، فأجد النسبة المئوية للتغير في كتلة عمر. أقرب إجابتي لأقرب عدد صحيح.

الخطوة 1 أجد مقدار التغير.

الاحظ أن التغير نقصان؛ لذا أطرح الكمية الجديدة من الكمية الأصلية لأجد مقدار التغير.

$$95 - 78 = 17$$

الكمية الأصلية - الكمية الجديدة

إذن، مقدار التغير يساوي 17

الخطوة 2 أجد النسبة المئوية للتغير.

$$\text{نسبة التغير المئوية} = \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{الكمية الأصلية}} \times 100\% = (\text{النسبة المئوية للتغير})$$

$$= \frac{17}{95} \times 100\% \quad \text{أعوّض مقدار التغير = 17، الكمية الأصلية = 95}$$

$$\approx 18\% \quad \text{أستعمل الآلة الحاسبة}$$

إذن، خسر عمر 18% من كتلته الأصلية.

أتحقق من فهمي:

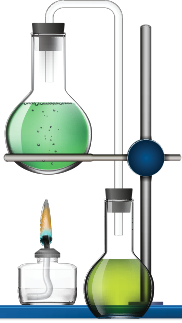
3 اشترى معاذ زهورًا بقيمة JD 240 وباعها بسعر JD 300. أجد النسبة المئوية لربح معاذ. 25%

4 اشترت فرح كاميرا بقيمة JD 119 بعد التخفيض، إذا كان سعر الكاميرا قبل التخفيض JD 140، فأجد النسبة المئوية للخصم الذي حصلت عليه فرح. 15%

الوحدة 1

من التطبيقات المهمة على النسبة المئوية أسئلة النسبة المئوية العكسية (reverse percentage)، التي تتطلب الحل بشكل عكسي بدءاً من الكمية النهائية للحصول على الكمية الأصلية.

مثال 4: من الحياة



أفكر

لِمَ نقسم على نسبة التغير المئوية عند إيجاد الكمية الأصلية؟

1 كيمياء: في إحدى التجارب الكيميائية سُخِّنَ سائل لرفع درجة حرارته بنسبة 16% لتصبح 80°C ، أجدُ درجة حرارة السائل T قبل الزيادة.

بما أن درجة الحرارة T زادت بنسبة 16%، إذن، النسبة المئوية بعد الزيادة تساوي 116%

$$T = \frac{80}{116\%}$$

$$= \frac{80}{1.16}$$

$$\approx 69$$

أقسم الكمية بعد التغير على النسبة المئوية بعد الزيادة

أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري

أقسم

إذن، درجة حرارة السائل قبل الزيادة 69°C تقريباً.

2 ثلاجات: أعلن متجرٌ للثلاجات عن خصمٍ نسبته 20%. إذا كان سعرٌ ثلاجة بعد الخصم JD 600، فأجدُ سعرها P قبل الخصم.

بما أن سعر الثلاجة نقص بنسبة 20%، إذن، النسبة المئوية بعد النقصان تساوي 80%

$$P = \frac{600}{80\%}$$

$$= \frac{600}{0.80}$$

$$= 750$$

أقسم الكمية بعد التغير على النسبة المئوية بعد النقصان

أحول النسبة المئوية إلى كسر عشري

أقسم

إذن، سعر الثلاجة قبل الخصم JD 750

أتتحقق من فهمي:



3 زاد سعر سيارة بنسبة 6% ليصبح JD 9116. أجدُ سعرها P قبل الزيادة. 8600

4 في موسم التنزيلات، بلغ سعر شاشة تلفاز JD 500. إذا كانت نسبة الخصم 7%، فأجدُ ثمن الشاشة P قبل الخصم. 537.6

أجد قيمة كل مما يأتي:

250% من 400
1000

3

0.14% من 40
0.056

2

300% من 2000
6000

1



ماء: يزيد حجم الماء عند تجمده بنسبة 10%. أجد حجم
750 mL من الماء بعد التجمد. 825 ml

4

سيارات: زادت شركة للسيارات سعر سيارة رياضية من JD 23000 إلى JD 25000.
أجد النسبة المئوية للزيادة في سعر السيارة، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.
8.7%

5



بطارية: تفقد بطارية هاتف شحنها الكامل بعد 20 ساعة.
إذا كانت النسخة المطورة من البطارية تستمر 30 دقيقة
إضافية، فأجد النسبة المئوية للزيادة في زمن عمل البطارية.
2.5%

6

	الاختبار A	الاختبار B
عمران	12	17
نادية	14	20

اختبارات: خضع عمران ونادية
لاختبارين لهما النهاية العظمى نفسها،
وكانت نتائجهما مثلما يظهر في الجدول.
من منهما كانت النسبة المئوية للزيادة في

7

علامته أكبر من الاختبار A إلى الاختبار B؟ أبين خطوات الحل.
نادية، أنظر خطوات حل الطلبة.

خففت شركة عدد عمالها بنسبة 5% فأصبح 228 عاملاً. أجد عدد عمال الشركة
الأصلي. 240

8



راتب: يتقاضى طبّاح JD 1431 شهرياً بعد زيادة على راتبه
بنسبة 8%. أجد راتب الطبّاح قبل الزيادة. 1325

9

اشترى أحمد كرسيّاً دواراً وباعه بمبلغ JD 63. إذا كانت نسبة خسارته فيه 55%، فما
التمن الأصلي للكرسي؟ 140

10

الوحدة 1

معدّل التنفّس: إذا كان معدّل تنفّس لؤيٍّ 20 مرةً في الدقيقة، فأجيبُ عمّا يأتي:



11 أجدُ عددَ مراتِ تنفّسِ لؤيٍّ إذا أصبحتُ 180% ممّا كانتُ عليه؛ نتيجةً لممارستهِ إحدى الرياضاتِ. 36

12 نتيجةً لممارسةِ لؤيٍّ رياضةً أشدَّ أصبحَ معدّلُ تنفّسهِ 120% منَ عددِ مراتِ الرياضةِ الأول، أجدُ عددَ مراتِ تنفّسهِ الجديد. 43

13 أعودُ إلى فقرة (استكشف) بدايةً الدرس، وأحلُّ المسألة.

المعنى: زاد الإنتاج عام 2019 بمقدار 19% عنه في عام 2018

إنتاج عام 2019 هو 25 ألف طن تقريباً.

14 **تحديد:** إذا كانت 38% من القوارير البلاستيكية التي يُنتجها مصنعُ زرقاء اللون، والقوارير المتبقية وعددها 7750 قارورةً لونها بنيٌّ؛ فأجدُ عددَ القوارير الزرقاء التي يُنتجها المصنع. 4750

15 **تبرير:** صممتُ جمانةً مزهريتين فخاريتين وباعتهما بالسعر الموضح في الشكل الآتي. تقولُ جمانةٌ إنَّ نسبةَ ربحها في المزهرية الأولى أكبرُ منَ نسبةِ ربحها في المزهرية الثانية. هل ما تقولُهُ جمانةٌ صحيحٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

المزهرية الأولى



سعرُ التكلفةِ JD 13
سعرُ البيعِ JD 16.7

المزهرية الثانية



سعرُ التكلفةِ JD 18
سعرُ البيعِ JD 22.5

نعم قولها صحيح، لأن نسبة ربحها في المزهرية الأولى 28%، وفي المزهرية الثانية 25%

16 **أكتب:** كيف أجدُ النسبة المئوية للتغير؟ وبِمَ أفسّرُ معنى النسبة التي تزيد

على 100%؟ أنظر إجابات الطلبة.

معلومة

يُقاسُ معدّلُ التنفّسِ عندَ الإنسانِ بعددِ الأنفاسِ التي يأخذها في الدقيقة الواحدة، ويعتمدُ ذلكَ على عدةِ عواملٍ، منها: عمرُ الشخصِ، وحالتهُ الصحيّةُ، والجهدُ الذي يبذلُهُ.

مهارات التفكير العليا

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 قيمة $\sqrt{2500}$ تساوي:

a) 25 b) -50

c) 50 d) ± 50

2 قيمة $(\sqrt{1.44} - 4.2)$ تساوي:

a) 3 b) -3

c) 7.8 d) -5.4

3 أفضل تقدير للعدد $(8 - \sqrt{40})$ هو:

a) 4 b) -16 c) 1 d) 2

4 قيمة $(\sqrt{2} \times \sqrt{32})$ تساوي:

a) 6 b) 8 c) 64 d) 16

5 مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين طول وتره

$\sqrt{72}$ cm. فإن طول كل من ضلعي القائمة يساوي:

a) 36 cm b) $3\sqrt{2}$ cm

c) 6 cm d) 18 cm

6 أي مجموعات الأطوال الآتية تمثل أطوال أضلاع

مثلث قائم الزاوية؟

a) 6, 8, 11 b) $\sqrt{10}$, 4, 5

c) $6, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ d) 5, 12, 14

7 أجد الأعداد الآتية عدد غير نسبي:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{6.25}$

c) $3\frac{1}{5}$ d) -2

8 قيمة $\sqrt[10]{64 \times 2^4}$ تساوي:

a) 8 b) 2 c) 4 d) 6

9 أبسط صورة للمقدار $\frac{u^{\frac{7}{4}} \times u^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{2}}}$ هي:

a) u^2 b) u^3 c) $u^{\frac{1}{2}}$ d) u

10 تبلغ سرعة الصوت 1236 km/h، وتكتب بالصيغة العلمية:

a) 1.236×10^4 b) 1.236×10^{-3}

c) 1.236×10^3 d) 12.36×10^2

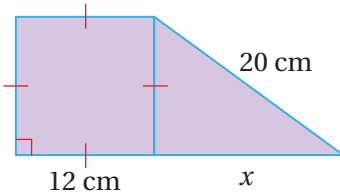
11 ناتج القسمة $(3 \times 10^{-2}) \div (5 \times 10^{-6})$ هو:

a) 0.6×10^3 b) 6×10^4

c) 6×10^{-3} d) 6×10^3

12 أجد طول الضلع المجهول في الشكل الآتي:

16



تدريب على الاختبارات الدولية

21 أبسط صورة للمقدار $\frac{6}{\sqrt{12}}$ هي:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{12}}{2}$
 c) $2\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

22 ناتج $(3.4 \times 10^7)(5.2 \times 10^6)$ بالصيغة العلمية هو:

- a) 1.768×10^{14} b) 17.68×10^{13}
 c) 8.6×10^{13} d) 1.768×10^{42}

23 أي المقادير الآتية يكافئ المقدار $(8y)^{\frac{4}{3}}$ ؟

- a) $\sqrt[4]{16y^3}$ b) $\sqrt[3]{8y^4}$
 c) $16\sqrt[3]{y^4}$ d) $8\sqrt[4]{y^3}$

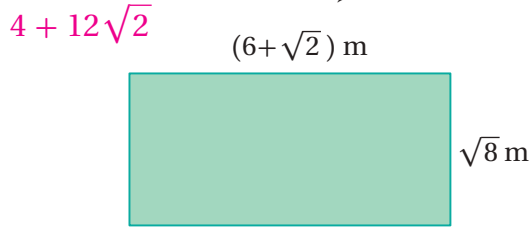
24 تُشير سجلات قسم الولادة في أحد المستشفيات إلى وجود 50 مولودًا 56% منهم إناث. إذا زاد عدد المواليد الإناث 7، فأجد النسبة المئوية لهذه الزيادة.

25%

أميز العدد النسبي من غير النسبي في ما يأتي:

- 13 $-\sqrt{36}$ 14 $\sqrt{50}$
 نسبي غير نسبي

15 أجد مساحة المستطيل الآتي بأبسط صورة:



16 أرتب مجموعة الأعداد الآتية تصاعديًا:

- $\sqrt{24}$, $5\frac{1}{4}$, $4.\bar{6}$, 5 , π
 π , $4.\bar{6}$, $\sqrt{24}$, 5 , $5\frac{1}{4}$

17 أبسط المقدار $\frac{\sqrt{7}}{2} \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt{28}}$

18 أكتب المقدار $\frac{p^{\frac{2}{3}}}{p^{-\frac{4}{3}}}$ بأبسط صورة. p^2

19 يبلغ طول حشرة الماء 0.01981 cm، وطول حشرة

السوس 0.09652 cm. أكتب العددين بالصيغة

العلمية، ثم أحدد أي الحشرتين أطول.

حشرة الماء: 1.981×10^{-2} ، حشرة السوس: 9.652×10^{-2}

حشرة السوس أطول.

20 باع متجر بذلة رجالية بمبلغ

JD 150، وبربح مقداره

30% أجد سعر التكلفة.

أقرب إجابتي لأقرب جزء

من عشرة. 115.4



تحليل المقادير الجبرية

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُستعمل تحليل المقادير الجبرية في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية والعلمية، فمثلاً يكتب المهندسون المعماريون النسبة بين مساحة جدران الغرفة وحجمها على صورة مقدار جبري نسبي، ثم يستعملون التحليل لتبسيطه وإيجاد أقل قيمة له؛ بهدف تقليل تكلفة تدفئة الغرفة في فصل الشتاء.



سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- حالات خاصة لضرب المقادير الجبرية.
- تحليل مقادير جبرية بإخراج العامل المشترك الأكبر وتجميع الحدود.
- تحليل الفرق بين مربعي حدين، وتحليل ثلاثي حدود على صورة $x^2 + bx + c$
- كتابة مقادير جبرية نسبية بأبسط صورة.

تعلمتُ سابقاً:

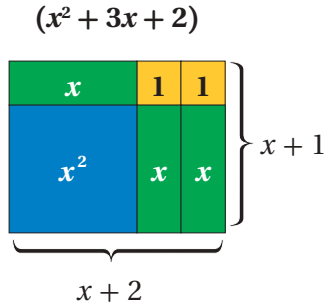
- ✓ إجراء العمليات الحسابية على الحدود والمقادير الجبرية، وكتابتها بأبسط صورة.
- ✓ تبسيط مقادير عديدة تتضمن أسساً باستخدام أولويات العمليات الحسابية.
- ✓ توظيف الأسس والمقادير الجبرية في حل مسائل حياتية.

مشروع الوحدة: القطع الجبرية

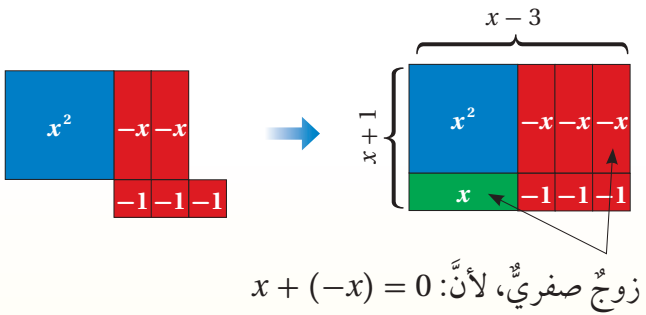


أستعمل القطع الجبرية لتمثيل مقادير جبرية وتحليلها:

يستعمل كل عضو في المجموعة القطع الجبرية لتمثيل مقدار جبري، ثم ينظم القطع الجبرية على شكل مستطيل، وعندئذ يكون طول المستطيل وعرضه عاملي المقدار الجبري كما في الشكل الآتي:



يحتاج تمثيل بعض المقادير الجبرية إلى إضافة أزواج صفرية مثل $(1 + -1 = 0)$ لإكمال تشكيل المستطيل:



عرض النتائج:

• يعرض كل فرد في المجموعة أمام زملائه في الصف كيفية تحليل مقدار جبري يختاره باستعمال القطع الجبرية.

أستعد ومجموعتي لتنفيذ مشروع الخاص الذي سأصنع فيه قطعاً جبرية، وأستعملها في تحليل المقادير الجبرية.

الأدوات اللازمة:

أوراق مقوامة متعددة الألوان (أزرق، وأخضر، وأحمر، وأصفر).

خطوات تنفيذ المشروع:

أصنع القطع الجبرية

1 أقص 5 مربعات من الورقة الزرقاء بمقاس $(10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm})$ ، وأكتب x^2 على كل منها.

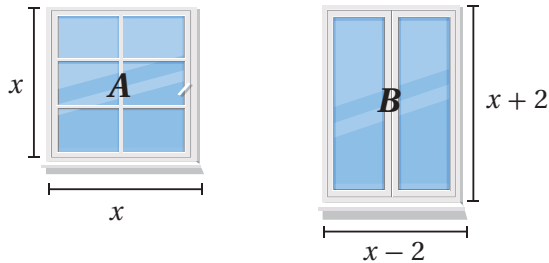


2 أقص 10 مستطيلات من الورقة الخضراء بمقاس $(3 \text{ cm} \times 10 \text{ cm})$ ، وأكتب (x) على كل منها، وأقص 10 مستطيلات بالمقاس نفسه من الورقة الحمراء، وأكتب $(-x)$ على كل منها.



3 أقص 15 مربعاً من الورقة الصفراء بمقاس $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ ، وأكتب (1) على كل منها، وأقص 15 مربعاً بالمقاس نفسه من الورقة الحمراء، وأكتب (-1) على كل منها.





أستكشفُ

أيُّ النافذتين مساحتها أكبر؟

فكرة الدرس

أتعرفُ قواعدَ إيجادِ مربع مجموع حدّين ومجموع حدّين في الفرق بينهما.

تعلّمتُ سابقًا إيجادَ مربع مجموع حدّين على الصورة $(a + b)^2$ عن طريق إيجاد حاصل الضرب $(a + b)(a + b)$ ، ويمكن أيضًا استعمال القطع الجبرية لتمثيل $(a + b)^2$ لأيّ قيمتين a و b كما يأتي:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} a+b \\ \hline a \quad b \\ \hline a \quad b \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right. \begin{array}{c} a^2 \quad ab \\ ab \quad b^2 \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ ab \\ ab \\ b^2 \end{array} \\
 \hline
 (a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}$$

إذن، ضرب مجموع حدّين في نفسه (مربع مجموع حدّين) يتبع قاعدة ثابتة يمكن استعمالها لتسهيل عملية الضرب.

مربع مجموع حدّين

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** مربع $(a + b)$ يساوي مربع a مضافًا إليه مثلًا حاصل ضرب a في b مضافًا إليه مربع b .

• **بالرموز:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

أجدُ ناتج كلِّ ممّا يأتي:

مثال 1

1 $(3k + 5)^2$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (3k + 5)^2 &= (3k)^2 + (2 \times 3k \times 5) + (5)^2 \\
 &= 9k^2 + 30k + 25
 \end{aligned}$$

مربع مجموع حدّين

$$a = 3k, b = 5$$

أبسطُ

الوحدة 2

2 $(y^2 + 3)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(y^2 + 3)^2 = (y^2)^2 + (2 \times y^2 \times 3) + 3^2$$

$$= y^4 + 6y^2 + 9$$

مربع مجموع حدين

$$a = y^2, b = 3$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $(2c + 10)^2 = 4c^2 + 40c + 100$

4 $(d^2 + 4)^2 = d^4 + 8d^2 + 16$

توجد أيضًا قاعدة لإيجاد $(a-b)^2$ ، ويمكن إيجادها بكتابة $(a-b)$ على صورة $a + (-b)$ ثم استعمال قاعدة $(a+b)^2$:

$$(a-b)^2 = [a + (-b)]^2 = (a)^2 + 2(a)(-b) + (b)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

مربع مجموع حدين

أبسط

مربع الفرق بين حدين

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** مربع $(a - b)$ يساوي مربع a مطروحًا منه مثلًا حاصل ضرب a في b مضافًا إليه مربع b .

• **بالرموز:** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال 2 أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(2h - z)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2h-z)^2 = (2h)^2 - (2 \times 2h \times z) + (z)^2$$

$$= 4h^2 - 4hz + z^2$$

مربع الفرق بين حدين

$$a = 2h, b = z$$

أبسط

2 $(6-5y^3)^2$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(6-5y^3)^2 = (6)^2 - (2 \times 6 \times 5y^3) + (5y^3)^2$$

$$= 36 - 60y^3 + 25y^6$$

مربع الفرق بين حدين

$$a = 6, b = 5y^3$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $(7t^2 - 1)^2 = 49t^4 - 14t^2 + 1$

4 $(x^3 - 4y^2)^2 = x^6 - 8x^3y^2 + 16y^4$

يتبع ناتج ضرب مجموع حدّين في الفرق بينهما $(a-b)(a+b)$ قاعدة ثابتة يمكن اكتشافها واستعمالها في إيجاد ناتج الضرب بسهولة:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} a+(-b) \\ \overbrace{a \quad -b} \\ a \left\{ \begin{array}{cc} a^2 & -ab \\ ab & -b^2 \end{array} \right. \\ b \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ -ab \\ ab \\ -b^2 \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ + \\ -ab \\ + \\ ab \\ + \\ -b^2 \end{array} = \begin{array}{c} a^2 \\ + \\ -b^2 \end{array} \\ (a+b)(a-b) = a^2 + (-ab) + ab + (-b^2) = a^2 + (-b^2) \end{array}$$

ضرب مجموع حدّين في الفرق بينهما

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** ناتج ضرب $(a-b)(a+b)$ يساوي مربع a مطروحاً منه مربع b .

• **بالرموز:** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

مثال 3 أجد ناتج كلِّ مما يأتي:

1 $(c+3)(c-3)$

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ (c+3)(c-3) &= (c)^2 - 3^2 \\ &= c^2 - 9 \end{aligned}$$

ضرب مجموع حدّين في الفرق بينهما
أعوّض $a = c, b = 3$
أبسّط

2 $(4x^2 + d^5)(4x^2 - d^5)$

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ (4x^2 + d^5)(4x^2 - d^5) &= (4x^2)^2 - (d^5)^2 \\ &= 16x^4 - d^{10} \end{aligned}$$

مربع مجموع حدّين
 $a = 4x^2, b = d^5$
أبسّط

الوحدة 2

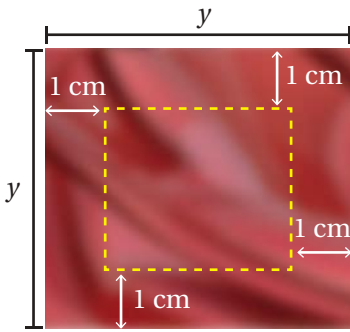
أتحقق من فهمي:

3 $(6w + d^4)(6w - d^4) = 36w^2 - d^8$

4 $(x^3 + 3h^7)(x^3 - 3h^7) = x^6 - 9h^{14}$

تُستعملُ قوانينُ (مربع مجموع حدّين) و(مربع الفرق بين حدّين) و(مجموع حدّين في الفرق بينهما) في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 4: من الحياة



خياطة: قطعة قماشٍ مربعة الشكل طول ضلعها y سنتيمترًا، إذا قُصَّ شريطٌ عرضُهُ 1 cm بمحاذاة حوافها الأربع، فأجد المساحة المتبقية وسط قطعة القماش بدلالة y .

الخطوة 1 أحدد طول ضلع قطعة القماش المتبقية في الوسط بعد القصّ. طول قطعة القماش الأصلية y سنتيمترًا قُصَّ منها 1 cm بمحاذاة حوافها الأربع. إذن، أصبح طول الضلع $(y-2)$ سنتيمترًا.

الخطوة 2 أحسب المساحة.

$$A = s^2$$

$$= (y-2)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(y-2)^2 = y^2 - (2 \times y \times 2) + 2^2$$

$$= y^2 - 4y + 4$$

مساحة المربع

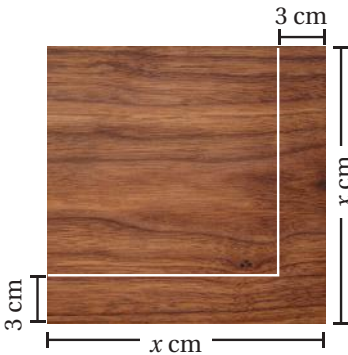
$$s = y - 2$$

قانون مربع الفرق بين حدّين

$$a = y, b = 2$$

أبسط

إذن، المساحة المتبقية في الوسط من القماش بدلالة y هي $(y^2 - 4y + 4) \text{ cm}^2$



أتحقق من فهمي:

نجارة: يبيّن الشكل المجاور أبعاد لوح خشبيّ مربع الشكل طول ضلعه x سنتيمترًا. إذا قُصَّ شريطٌ عرضه 3 cm من حافتي اللوح مثلما يظهر في الشكل، فأحسب مساحة المربع المتبقي من اللوح بدلالة x . $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \text{ cm}^2$

يمكن استعمال قواعد ضرب المقادير الجبرية لإجراء بعض الحسابات الذهنية بسهولة.

مثال 5

استعمل الحساب الذهني لأجد ناتج كل مما يأتي:

1 71^2

$$71^2 = (70 + 1)^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(70 + 1)^2 = 70^2 + (2 \times 70 \times 1) + 1^2$$

$$= 4900 + 140 + 1$$

$$= 5041$$

أكتب 71^2 على صورة مربع مجموع حدين

مربع مجموع حدين

$$a = 70, b = 1$$

أضرب

أجمع

$$71^2 = 5041, \text{ إذن،}$$

أتحقق من فهمي: ✓

2 $52^2 \quad (50 + 2)^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$

3 $49^2 \quad (50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$

أتحرب

وأحل المسائل

أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(w + 2)^2 \quad w^2 + 4w + 4$

2 $(x - 11)^2 \quad x^2 - 22x + 121$

3 $(4m^3 - 5y)^2$
 $16m^6 - 40m^3y + 25y^2$

4 $(w^2 - 7)(w^2 - 7)$
 $w^4 - 14w^2 + 49$

5 $(5a + 4)(5a - 4)$
 $25a^2 - 16$

6 $(x^2 + 7y^4)(x^2 - 7y^4)$
 $x^4 - 49y^8$



هندسة: بركة سباحة مستطيلة الشكل، طولها

بالمتر $(3x + 6)$ وعرضها بالمتر $(3x - 6)$ ،

أجد مساحتها بدلالة x وبأبسط صورة.

$$9x^2 - 36m^2$$

الوحدة 2

$$(10) (40-3)^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$$

حساب ذهني: أستعمل الحساب الذهني لأجد ناتج كل مما يأتي:

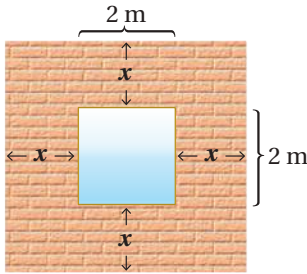
8 88^2

9 403^2

10 37^2

8) $(90-2)^2 = 8100 - 360 + 4 = 7744$

9) $(400+3)^2 = 160000 + 2400 + 9 = 162409$



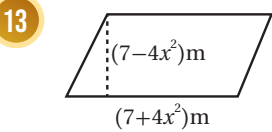
11 يبيّن الشكل المجاور جداراً مربع الشكل تتوسطه نافذة. أعبّر عن مساحة الجدار بدلالة x بطريقتين مختلفتين. أنظر الهامش.

معلومة

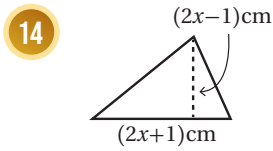
تتمدّد معظم المواد بالحرارة وتقلّص بالبرودة، إلا أن الماء يخالف هذه القاعدة، إذ إنّه يتمدّد بالبرودة ويتقلّص بالحرارة.

12 **علوم:** لوحة معدنية مربعة الشكل، طول ضلعها بالسنتيمتر (w)، إذا تعرضت للحرارة فتمدّدت مُحافِظَةً على شكلها وازداد طول ضلعها بمقدار 0.02 cm، فأجد مساحة اللوحة بعد التمدّد بدلالة w . $(w^2 + 0.04w + 0.0004) \text{ cm}^2$

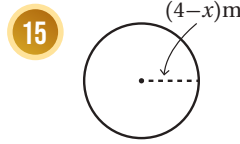
قياس: أجد مساحة كل شكل مما يأتي بدلالة x :



$(49 - 16x^4) \text{ cm}^2$



$(2x^2 - \frac{1}{2}) \text{ cm}^2$



$\pi(16 - 8x + x^2)$

16 العبارة المختلفة هي $x^2 + 6x + 18$ لأنها ليست مربعاً كاملاً (لا يمكن كتابتها على شكل حاصل ضرب عاملين متساويين) كباقي العبارات.

مهارات التفكير العليا

16 **أكتشف المختلف:** أحدد العبارة المختلفة عن بقية العبارات:

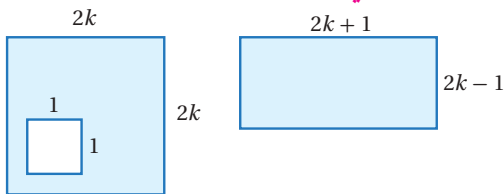
$x^2 - 10x + 25$

$x^2 + 6x + 18$

$x^2 + 8x + 16$

$x^2 + 2x + 1$

17 **تحذّر:** هل توجد قاعدة لحساب $(x-y)^3$ ؟
تبرير: أبين أن مساحتي الجزأين المتظللين في الشكلين المجاورين متساويتان أم لا. أبرر إجابتي.
 يوجد قاعدة وهي: $(x-y)^3 = (x-y)(x^2 - 2xy + y^2)$



$A_1 = 4k^2 - 1, A_2 = (2k+1)(2k-1) = 4k^2 - 1$ المساحتان متساويتان.

إرشاد

18 لحلّ هذا السؤال، أكتب المقدار بصورة ضرب مكرّر.

19 **أكتب** أكتب فقرةً أبين فيها كيف أجد مربع مجموع حدين. أنظر إجابات الطلبة.



الهدف: أحلّ مقداراً جبرياً معطى على صورة $ax + b$ أو الصورة $x^2 + bx$ باستعمال القطع الجبرية.

عند ضرب عددين أو أكثر فإن كلاً منهما يُسمى عاملاً لنتيجة الضرب.

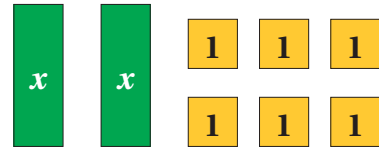
في بعض الأحيان، يكون ناتج الضرب معلوماً والمطلوب إيجاد العوامل، وتُسمى هذه العملية التحليل. يمكن استعمال القطع الجبرية لتحليل المقادير الجبرية.

نشاط 1

أستعمل القطع الجبرية لتحليل المقدار $2x + 6$

الخطوة 1

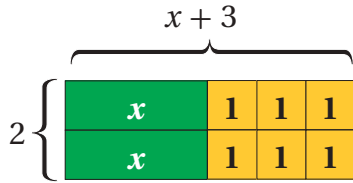
أمثل المقدار $2x + 6$ باستعمال قطع جبرية:



الخطوة 2

أرتب القطع الجبرية على هيئة مستطيل.

ألاحظ أن طول المستطيل $(x+3)$ وعرضه (2) ومساحته $(2x+6)$.



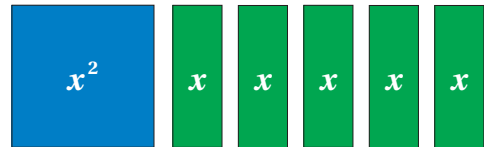
$$2x + 6 = (2)(x + 3), \text{ إذن،}$$

نشاط 2

أستعمل القطع الجبرية لتحليل المقدار $x^2 + 5x$

الخطوة 1

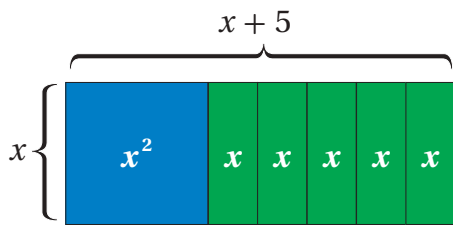
أستعمل القطع الجبرية لتمثيل المقدار $x^2 + 5x$



الخطوة 2

أرتب القطع الجبرية على هيئة مستطيل.

ألاحظ أن طول المستطيل $(x + 5)$ وعرضه (x) ومساحته $(x^2 + 5x)$



$$x^2 + 5x = x(x + 5), \text{ إذن،}$$

في الأسئلة (4-1) أنظر تمثيل الطلبة بالقطع الجبرية.

أستخدم القطع الجبرية لتحليل كل مقدار جبري مما يأتي:



1 $5x + 5$

2 $2x + 8$

3 $x^2 + 7x$

4 $x^2 + 4x$



أستكشف

شاشة تلفازٍ مستطيلة الشكل،
مساحتها $2x^2 + 60x$ سنتيمترًا مربعًا،
وعرضها $2x$ سنتيمترًا، ما طولها
بدلالة x ؟

فكرة الدرس

أحلل مقادير جبرية بإخراج العامل
المشترك الأكبر.

المصطلحات

الصورة التحليلية، التحليل، التجميع.

كتابة الحد الجبري بالصورة التحليلية (factored form) تعني كتابته على صورة حاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات كل منها مرفوع للأس 1، وعند كتابة الحد الجبري بالصورة التحليلية فإننا نقول إنه حُلَّ تحليلًا كاملاً.

$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$

مكتوب بالصورة التحليلية
(تحليل كامل)

$$18x^3 = 6 \times 3 \times x \times x^2$$

ليس مكتوبًا بالصورة التحليلية
(ليس تحليلًا كاملاً)

تعلمت سابقًا أن العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) لعددين أو أكثر يساوي ناتج ضرب العوامل الأولية المشتركة بينها، ويمكن أيضًا إيجاد العامل المشترك الأكبر لحددين جبريين أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال 1

أجد العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين في كل مما يأتي:

1 $12y^2, 18y$

$$12y^2 = \textcircled{3} \times 2 \times \textcircled{2} \times \textcircled{y} \times y$$

أكتب كل حد بالصورة التحليلية

$$18y = \textcircled{3} \times 3 \times \textcircled{2} \times \textcircled{y}$$

ثم أحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين $18y$ و $2y^2$ هو: $3 \times 2 \times y = 6y$

2 $20z^2 d, 10z^5 dc$

$$20z^2 d = \underbrace{5}_{\text{red}} \times \underbrace{2}_{\text{green}} \times 2 \times \underbrace{z}_{\text{orange}} \times \underbrace{z}_{\text{blue}} \times \underbrace{d}_{\text{purple}}$$

$$10z^5 dc = \underbrace{5}_{\text{red}} \times \underbrace{2}_{\text{green}} \times z \times \underbrace{z}_{\text{orange}} \times \underbrace{z}_{\text{blue}} \times z \times z \times \underbrace{d}_{\text{purple}} \times c$$

أكتب كل حد بالصورة التحليلية

ثم أحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين $20z^2 d$ و $10z^5 dc$ هو $5 \times 2 \times z \times z \times d = 10z^2 d$

أتحقق من فهمي: 

3 $14b^2 c, 21c^3 7c$

4 $2y^3 x^5, 3y^5 x^3 y^3 x^3$

أتذكر

يحتوي المقدار الجبري
حدًا جبريًا أو أكثر.

تعلمت سابقًا استعمال خاصية التوزيع لضرب حد جبري في مقدار جبري:

$$3x(x + 8) = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x^2 + 24x$$

يمكن عكس خطوات هذه العملية لإعادة كتابة مقادير جبرية على صورة حاصل ضرب حد جبري في مقدار جبري:

$$3x^2 + 24x = 3x(x) + 3x(8)$$

$$= 3x(x + 8)$$

تحليل (factoring) المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر لحدوده يعني تحليله تحليلًا كاملًا باستعمال عملية عكسية لعملية التوزيع (خاصية التوزيع).

$$4y(3y + 4)$$

تحليل كامل

$$2y(6y + 8)$$

ليس تحليلًا كاملًا؛ لأن $(6y + 8)$ يمكن تحليلها على صورة $2(3y + 4)$

الوحدة 2

مثال 2

أحل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $6x + 18$

الخطوة 1 أجد العامل المشترك الأكبر للحددين $6x$ و 18

$$6x = 2 \times 3 \times x$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

أحل كل حد إلى عوامله الأولية وأحدد العوامل الأولية المشتركة

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times 3 = 6$

الخطوة 2 أكتب كل حد على صورة ناتج ضرب العامل المشترك الأكبر في بقية العوامل، ثم أخرج العامل

المشترك الأكبر خارج القوس.

$$6x + 18 = 6(x) + 6(3)$$

$$= 6(x + 3)$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

إذن، $6x + 18 = 6(x + 3)$

2 $6b^2 k + 8k^3 b^5 + 12k^2$

الخطوة 1 أجد العامل المشترك الأكبر للحدود التي يتكوّن منها المقدار الجبري.

$$6b^2 k = 2 \times 3 \times b \times b \times k$$

$$8k^3 b^5 = 2 \times 2 \times 2 \times k \times k \times k \times b \times b \times b \times b \times b$$

$$12k^2 = 2 \times 2 \times 3 \times k \times k$$

أحل كل حد إلى عوامله الأولية

إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times k = 2k$

الخطوة 2 أكتب كل حد على صورة ناتج ضرب العامل المشترك الأكبر في بقية العوامل، ثم أخرج العامل

المشترك الأكبر خارج القوس.

$$6b^2 k + 8k^3 b^5 + 12k^2 = 2k(3b^2) + 2k(4k^2 b^5) + 2k(6k)$$

$$= 2k(3b^2 + 4k^2 b^5 + 6k)$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

إذن، $6b^2 k + 8k^3 b^5 + 12k^2 = 2k(3b^2 + 4k^2 b^5 + 6k)$

أتحقق من فهمي:



3 $20y + 12 = 4(5y + 3)$

4 $7d^2 - 5d = d(7d - 5)$

5 $3r^2c^3 + 6r^5 + 21r^7 = 3r^2(c^3 + 2r^3 + 7r^5)$

6 $2 - 16x + 8y = 2(1 - 8x + 4y)$

يمكن أيضًا تحليل بعض المقادير الجبرية التي تحتوي أربعة حدود جبرية أو أكثر باستعمال طريقة التجميع (grouping)، وذلك بتجميع الحدود التي توجد عوامل مشتركة بينها، ويمكن أن تكون هذه العوامل المشتركة مقادير جبرية (ليست حدودًا فحسب).

التحليل بتجميع الحدود

مفهوم أساسي



- **بالكلمات:** يمكن تحليل المقدار الجبري بالتجميع إذا تحققت فيه الشروط الآتية جميعها:
 - إذا احتوى أربعة حدود أو أكثر.
 - إذا احتوى عوامل مشتركة بين الحدود يمكن تجميعها معًا.
 - إذا احتوى عاملين مشتركين متساويين كان أحدهما نظيرًا جمعياً (معكوسًا) للآخر.

$$\begin{aligned}ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (a + b)(x + y)\end{aligned}$$

• **بالرموز:**

مثال 3

أحلل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلًا كاملاً:

1 $5ab + 10a + 7b + 14$

$$\begin{aligned}5ab + 10a + 7b + 14 &= (5ab + 10a) + (7b + 14) \\ &= 5a(b + 2) + 7(b + 2) \\ &= (b + 2)(5a + 7)\end{aligned}$$

أجمع الحدود ذات العوامل المشتركة
أحلل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر
أخرج $(b + 2)$ عاملاً مشتركاً

الوحدة 2

2 $6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2$

$$\begin{aligned} 6m^3 - 12mn + m^2n - 2n^2 &= (6m^3 - 12mn) + (m^2n - 2n^2) \\ &= 6m(m^2 - 2n) + n(m^2 - 2n) \\ &= (m^2 - 2n)(6m + n) \end{aligned}$$

أجمع الحدود ذات العوامل المشتركة
أحلل كل تجميع بإخراج العامل
المشترك الأكبر
أخرج $(m^2 - 2n)$ عاملاً مشتركاً

أتدقق من فهمي: 

3 $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ $(x + 2)(x^2 + 3)$ 4 $4s^2 - s + 12st - 3t$ $(4s - 1)(s + 3t)$

عند تحليل المقادير الجبرية، ألاحظ أحياناً وجود معكوس بعض العوامل، فمثلاً $(3-x)$ هو معكوس $(x-3)$ لأن
 $(3-x) = -1(x-3)$

مثال 4

أحلل كل مقدار جبري مما يأتي تحليلاً كاملاً:

1 $2m(7m - 3) + 4(3 - 7m)$

$$\begin{aligned} 2m(7m-3) + 4(3-7m) &= 2m(7m-3) + 4(-1)(7m-3) && \text{أكتب } (3-7m) \text{ بصورة } -1(7m-3) \\ &= 2m(7m-3) - 4(7m-3) && \text{أضرب: } 4(-1) = -4 \\ &= (7m-3)(2m-4) && \text{أخرج } 7m-3 \text{ عاملاً مشتركاً} \\ &= 2(7m-3)(m-2) && \text{أخرج } 2 \text{ عاملاً مشتركاً} \end{aligned}$$

2 $15x - 5xy + 6y^2 - 18y$

$$\begin{aligned} 15x - 5xy + 6y^2 - 18y &= (15x - 5xy) + (6y^2 - 18y) && \text{أجمع الحدود ذات العوامل المشتركة} \\ &= 5x(3-y) + 6y(y-3) && \text{أحلل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر} \\ &= 5x(3-y) + 6y(-1)(3-y) && \text{أكتب } (y-3) \text{ بصورة } -1(3-y) \\ &= (3-y)(5x-6y) && \text{أخرج } 3-y \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي:

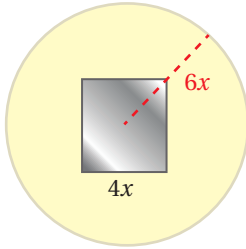


3 $a(r-t) + m(t-r) (r-t)(a-m)$

4 $2t - 14st + 7st^2 - t^2 t(7s-1)(t-2)$

يُستعمل تحليل المقادير الجبرية في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية.

مثال 5: من الحياة



نجارة: يبين الشكل المجاور لوحًا خشبيًا دائريًا الشكل طول نصف قطره $6x$ سنتيمترًا، تتوسطه مرآة مربعة طول ضلعها $4x$ سنتيمترًا. أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة المنطقة التي لا تغطيها المرآة من اللوح الخشبي بدلالة x ، وأحلل المقدار تحليلًا كاملاً.

الخطوة 1 أجد مساحة المنطقة التي لا تغطيها المرآة من اللوح الخشبي بدلالة x :

$$\begin{aligned} A_1 &= r^2 \pi && \text{قانون مساحة الدائرة} \\ &= (6x)^2 \pi = 36\pi x^2 && \text{بتعويض } r = 6x \\ A_2 &= s^2 && \text{قانون مساحة المربع} \\ &= (4x)^2 = 16x^2 && \text{بتعويض } s = 4x \\ A &= A_1 - A_2 && \text{مساحة المنطقة الظاهرة من اللوح الخشبي} \\ &= 36\pi x^2 - 16x^2 && \text{بالتعويض} \end{aligned}$$

إذن، مساحة المنطقة التي لا تغطيها المرآة من اللوح الخشبي تساوي $36\pi x^2 - 16x^2$ سنتيمترًا مربعًا.

الخطوة 2 أحلل المقدار $36\pi x^2 - 16x^2$ تحليلًا كاملاً:

$$\begin{aligned} 36\pi x^2 &= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times \pi \times x \times x \\ 16x^2 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \end{aligned}$$

أحلل كل حد إلى عوامله الأولية وأحدد العوامل الأولية المشتركة

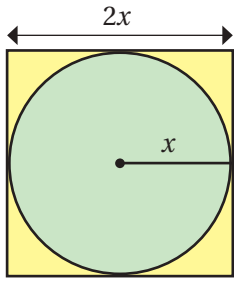
إذن، العامل المشترك الأكبر هو: $2 \times 2 \times x \times x = 4x^2$

$$\begin{aligned} 36\pi x^2 - 16x^2 &= 4x^2 (9\pi) - 4x^2 (4) \\ &= 4x^2 (9\pi - 4) \end{aligned}$$

أعيد كتابة كل حد باستعمال العامل المشترك الأكبر أخرج العامل المشترك الأكبر خارج القوس

$$36\pi x^2 - 16x^2 = 4x^2 (9\pi - 4), \text{ إذن}$$

الوحدة 2



أتحقق من فهمي:

يبين الشكل المجاور قطعة أرضٍ مربعة الشكل، يتوسطها حوض قمح دائري الشكل يُروى بمرشٍ دوارٍ. أكتب مقداراً جبرياً يمثل مساحة المنطقة غير المزروعة بالقمح بدلالة x ، وأحلل المقدار تحليلًا كاملاً.

$$4x^2 - \pi x^2 = x^2 (4 - \pi)$$

أندرب وأحل المسائل

أجد العامل المشترك الأكبر للحددين الجبريين في كلِّ مما يأتي:

- | | | | | | |
|---|--------------------------|------------|---|------------------------------|------------|
| 1 | $12a, 16ab$ | $4a$ | 2 | $8a, 12b$ | 4 |
| 3 | $10x^6 y^3, 45x y^7$ | $5xy^3$ | 4 | $12d^2 w^2 r^5, 4w^3 d^{10}$ | $4d^2 w^2$ |
| 5 | $n^3 s^5 r^5, 6ns^3 r^7$ | $ns^3 r^5$ | 6 | $5k^8 w^3 h^2, 11k^2 h^4$ | $k^2 h^2$ |

أحلل كلَّ مقدارٍ جبريٍّ مما يأتي تحليلًا كاملاً:

- | | | | | | |
|----|-----------------|----|--------------------|----|-------------------|
| 7 | $6r^2 - 10r$ | 8 | $ab^2 - 2ab$ | 9 | $12n^2 m - 8nm^3$ |
| | $2r(3r-5)$ | | $ab(b-2)$ | | $4nm(3n-2m^2)$ |
| 10 | $15wx - 10wy^2$ | 11 | $4t^2 + 2t - 12tu$ | 12 | $12p + 24q - 6$ |
| | $5w(3x - 2y^2)$ | | $2t(2t+1-6u)$ | | $6(2p+4q-1)$ |

أحلل كلَّ مقدارٍ جبريٍّ مما يأتي تحليلًا كاملاً:

- | | | | |
|----|----------------------|----|-------------------------|
| 13 | $y - 2y^2 - 18y + 9$ | 14 | $48ab - 90a + 32b - 60$ |
| | $(1 - 2y)(y + 9)$ | | $2(3a + 2)(8b - 15)$ |



15 **طاقة بديلة:** ركب أحمد خلايا شمسية على سطح منزله، فإذا علمت أن مساحة اللوح الشمسي $6y(y-4) + 10(4-y)$ وحدة مربعة، وطولُه $(4-y)$ ، فأجد عرضه بدلالة y . $10 - 6y = 2(5 - 3y)$

أكمل التحليل في كلِّ مما يأتي:

- | | | | |
|----|-----------------------------|----|----------------------------------|
| 16 | $12y - 32 = \dots (3y - 8)$ | 17 | $18c - 6 = \dots (3c - 1)$ |
| | 4 | | 6 |
| 18 | $t^2 + t = \dots (t + 1)$ | 19 | $2a^2 + ab = \dots (2a + \dots)$ |
| | t | | a |



حواسيبُ: حافظةُ أقراصٍ مدمجةٍ مربعة الشكل، طولُ ضلعها $4x$ ، فإذا كان طولُ نصفِ قطرِ القرصِ المدمج $2x$ ، فأكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ المساحةَ السوداءَ المحيطةَ بالقرصِ في الشكلِ المجاورِ، وأحلِّلهُ تحليلًا كاملاً. $4x^2(4-\pi)$

20

معلومة

تُطلَى واجهةُ القرصِ المدمج التي تخزنُ البيانات بطبقة رقيقة من الألمنيوم النقي، وتُستعملُ أشعة الليزر في تسجيل البيانات عليها.

21

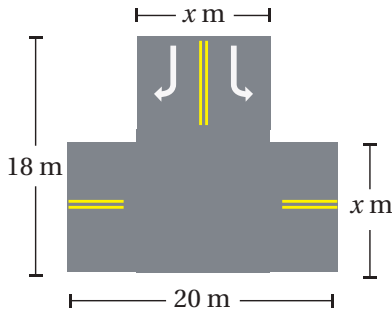
هندسة: يمثلُ المقدارُ الجبريُّ $2\pi r^2 + 2\pi rh$ المساحة الكلية لسطح أسطوانةٍ حيثُ r طولُ نصفِ قطرِ القاعدةِ و h الارتفاعُ. أحلِّلُ هذا المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملاً. $2\pi r(r + h)$

22

أجهزة: أعودُ إلى فقرة (أستكشف)، وأحلُّ المسألة. $x + 30$

23

مروزي: يظهرُ في الشكلِ المجاورِ تقاطعُ مروزيٍّ أُعيدَ تعييدهُ. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يمثلُ مساحةَ المنطقة التي أُعيدَ تعييدها، وأحلِّلهُ تحليلًا كاملاً.



$$20x + x(18-x) = x(38-x) \text{ m}^2$$

مهاراتُ التفكير العلياً

24

أكتشفُ الخطأ: يقولُ كلُّ من خالدٍ وسلمانٍ ومثنى إنَّهُ حلَّ المقدارَ الجبريَّ تحليلًا كاملاً على النحو الآتي، أكتشفُ الخطأ في حلِّ كلِّ منهم، وأصحِّحهُ.

مثنى	سلمان	خالد
$18h^2 + 45h = 3h(6h + 15)$	$2a^2 - 3a = a(2^2 - 3)$	$4g + 6 = 4(g + 2)$

24 مثنى: التحليل غير مكتمل. التحليل الصحيح $9h(2h+5)$
سلمان: خطأ في التحليل. التحليل الصحيح $a(2a-3)$
خالد: خطأ في التحليل. التحليل الصحيح $2(2g+3)$

مسألة مفتوحة: أملأ الفراغات في كلِّ ممَّا يأتي بحدودٍ جبريةٍ لأحصلَ على عبارةٍ

صحيحة:

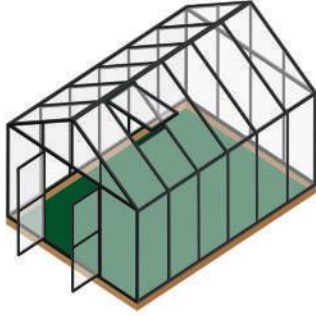
إجابة ممكنة:

إجابة ممكنة:

25 $x^2y + xy^2 \equiv xy(x + y)$ 26 $9z^2 - 6zx \equiv 3z(3z - 2x)$

27

أكتبُ أكتبُ فقرةً أبينُ فيها كيفية تحليلٍ مقدارٍ جبريٍّ بطريقة التجميع. أنظر إجابات الطلبة.



أستكشفُ

لدى عمران بيت زجاجي للزراعة يغطي منطقة مستطيلة الشكل، مساحتها $x^2 + 5x + 6$ متراً مربعاً وعرضها $(x + 2)$ متراً. ما طول المنطقة التي يغطيها البيت الزجاجي؟

فكرة الدرس

أحلل ثلاثيات حدود على صورة $x^2 + bx + c$

عند ضرب مقدارين جبريين، فإن كلا منهما يكون عاملاً لنتج الضرب.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + 3x + 2x + 2 \times 3 \\ &= x^2 + (3 + 2)x + 2 \times 3 \\ &= x^2 + (5)x + 6\end{aligned}$$

خاصية التوزيع
بتجميع الحدّين المتشابهين
بالتبسيط

ألاحظ النمط الآتي في عملية الضرب السابقة:

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= x^2 + (3 + 2)x + (2 \times 3) \\ (x + m)(x + n) &= x^2 + (n + m)x + mn \\ &= x^2 + \underbrace{(m + n)}_{bx} + \underbrace{mn}_c \\ &= x^2 + bx + c\end{aligned}$$

$$b = m + n \text{ and } c = mn$$

إذن، معامل الحد الأوسط يساوي مجموع m و n ، والحد الأخير يساوي ناتج ضرب m و n .

ويمكن استعمال هذا النمط لتحليل بعض المقادير الجبرية التي على صورة $x^2 + bx + c$

تحليل ثلاثية الحدود $x^2 + bx + c$

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** لتحليل ثلاثية حدود على صورة $x^2 + bx + c$ أجد عددين صحيحين m و n مجموعهما يساوي (b) ، وحاصل ضربيهما يساوي (c) ، ثم أكتب $x^2 + bx + c$ على صورة $(x + m)(x + n)$.

• **بالرموز:** $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ حيث $m + n = b$ ، $m \times n = c$

إذا كانت إشارة c موجبةً في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فيكون m و n الإشارة نفسها. ويعتمد تحديد إشارة كلٍّ من m و n (موجبةً أو سالبةً) على إشارة b ، فإذا كانت إشارة b موجبةً فإنَّ إشارتهما موجبةً، وإذا كانت إشارة b سالبةً، فإنَّ إشارتهما سالبةً.

مثال 1

أحلل $x^2 + 7x + 12$

بما أن $c = 12$ ، $b = 7$ فيجب إيجاد عددين موجبين مجموعهما 7 وحاصل ضربهما 12
أنشئ جدولاً، وأنظّم فيه أزواج عوامل العدد 12 الموجبة، وأحدّد العاملين اللذين مجموعهما 7

أزواج عوامل العدد 12 الموجبة	1, 12	2, 6	3, 4
مجموع العاملين	13	8	7

العاملان الصحيحان

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 12 &= (x + m)(x + n) \\ &= (x + 3)(x + 4) \end{aligned}$$

أكتب القاعدة

$$m = 3, n = 4 \text{ أَوْض}$$

أتحقّق: أتحقّق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$\begin{aligned} (x + 3)(x + 4) &= x^2 + 4x + 3x + 12 \\ &= x^2 + 7x + 12 \quad \checkmark \end{aligned}$$

خاصية التوزيع

بالتبسيط

أتحقّق من فهمي:



1 $x^2 + 11x + 10 = (x + 1)(x + 10)$

2 $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

إذا كانت c موجبةً، و b سالبةً في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فإنَّ لكلٍّ من m و n إشارة سالبةً.

الوحدة 2

مثال 2 أحلّ $x^2 - 10x + 16$

في ثلاثي الحدود المُعطى $c = 16$, $b = -10$ ، وهذا يعني أن $m + n$ سالبة و nm موجبة. إذن، يجب أن تكون إشارة كل من n و m سالبة. أنشئ جدولاً، وأنظّم فيه أزواج عوامل العدد 16 السالبة، وأحدّد زوج العوامل الذي مجموعهُ -10

العاملان الصحيحان

أزواج عوامل العدد 16 السالبة	-1, -16	-2, -8	-4, -4
مجموع العاملين	-17	-10	-8

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 16 &= (x + m)(x + n) \\ &= (x - 2)(x - 8) \end{aligned}$$

أكتب القاعدة

$$m = -2, n = -8 \text{ أعوّض}$$

أتحقّق: أتحقّق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$\begin{aligned} (x - 2)(x - 8) &= x^2 - 2x - 8x + 16 \\ &= x^2 - 10x + 16 \quad \checkmark \end{aligned}$$

خاصية التوزيع

بالتبسيط

أتحقّق من فهمي: 

1 $y^2 - 5y + 6$ $(y - 2)(y - 3)$

2 $x^2 - 11x + 30$ $(x - 5)(x - 6)$

إذا كانت إشارة c سالبة في ثلاثي الحدود $x^2 + bx + c$ ، فإن لكل من m و n إشارتين مختلفتين.

مثال 3 أحلّ $x^2 + x - 20$

في ثلاثي الحدود المُعطى $c = -20$, $b = 1$ ، وهذا يعني أن إشارة $m + n$ موجبة وإشارة nm سالبة. إذن، يجب أن تكون إشارة n أو m سالبة، وليس كلاهما. أنشئ قائمة منظمة من أزواج عوامل العدد (-20) مختلفة الإشارة، وأحدّد زوج العوامل الذي مجموعهُ 1

العاملان الصحيحان

أزواج عوامل العدد (-20) مختلفة الإشارة	1, -20	-1, 20	2, -10	-2, 10	4, -5	-4, 5
مجموع العاملين	-19	19	-8	8	-1	1

$$x^2 + x - 20 = (x + m)(x + n)$$

$$= (x - 4)(x + 5)$$

أكتب القاعدة

$$m = -4, n = 5 \text{ أَوْض}$$

أتحقّق: أتحقّق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(x - 4)(x + 5) = x^2 + 5x - 4x - 20$$

$$= x^2 + x - 20 \quad \checkmark$$

خاصية التوزيع
بالتبسيط

أتحقّق من فهمي:



1 $x^2 + 2x - 8 \quad (x + 4)(x - 2)$

2 $x^2 - x - 42 \quad (x - 7)(x + 6)$

يُستعمل التحليل لإيجاد مقدارٍ جبريٍّ يمثل طولاً أو عرضاً مستطيلٍ مساحته معطاةً على صورةٍ ثلاثيٍّ حدودٍ $x^2 + bx + c$ ، حيثُ يمثل الطول والعرض عاملَي ثلاثيٍّ الحدودِ.



مثال 4: من الحياة



يمثل ثلاثيُّ الحدودِ $x^2 + 9x + 18$ مساحةَ مرآةٍ مستطيلةٍ الشكلِ بالمترِ المربعِ. إذا كانَ عرضُ المرآةِ $(x + 3)$ متراً، فأجدُ كلاً من طولها ومحيطها بدلالةٍ x .

الخطوة 1 أجدُ طولَ المرآةِ بدلالةٍ x .

يمثلُ عرضُ المرآةِ $(x + 3)$ أحدَ عاملَي $x^2 + 9x + 18$ إذن $m = 3$

أبحثُ عن قيمةٍ n التي ناتجُ ضربها في 3 يساوي 18 وناتجُ جمعها إلى العددِ 3 يساوي 9

إذن، $n = 6$ ، والمقدارُ الجبريُّ الذي يمثلُ طولَ المرآةِ هو $(x + 6)$

الخطوة 2 أجدُ محيطَ المرآةِ بدلالةٍ x .

$$P = 2l + 2w$$

$$= 2(x + 6) + 2(x + 3)$$

$$= 2x + 12 + 2x + 6$$

$$= 4x + 18$$

قانونُ محيطِ المستطيلِ

$$\text{أَوْض: } l = (x + 6), w = (x + 3)$$

خاصية التوزيع

أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ

إذن، محيطُ المرآةِ يساوي $4x + 18$ متراً.

الوحدة 2



أتتحقق من فهمي:



يمثلُ ثلاثيُّ الحدودِ $x^2 - 25x + 100$ مساحةَ بابٍ مستطيلٍ الشكلِ بالمتِرِ المربعِ.

إذا كانَ طولُ البابِ $(x - 5)$ متراً، فأجدُ كلاً مِنْ عرضِهِ ومحيطِهِ بدلالةِ x

العرض $(x-20)$ ، المحيط $(4x-50)$

أُتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلَّ ممَّا يأتي:

1 $x^2 + 2x - 24$
 $(x+6)(x-4)$

2 $y^2 + 3y - 10$
 $(y+5)(y-2)$

3 $x^2 + 29x + 100$
 $(x+4)(x+25)$

4 $w^2 - 6w + 8$
 $(w-2)(w-4)$

5 $-10q + q^2 + 21$
 $(q-7)(q-3)$

6 $y^2 + 20y + 100$
 $(y+10)^2$

7 $a^2 + 5a + 6$
 $(a+2)(a+3)$

8 $w^2 - 9w - 10$
 $(w-10)(w+1)$

9 $x^2 + x - 30$
 $(x+6)(x-5)$

10 $13y + 30 + y^2$
 $(y+3)(y+10)$

11 $w^2 + 11w + 18$
 $(w+2)(w+9)$

12 $t^2 - t - 90$
 $(t-10)(t+9)$

13 $f^2 + 22f + 21$
 $(f+1)(f+21)$

14 $h^2 - h - 72$
 $(h-9)(h+8)$

15 $m^2 - 18m + 81$
 $(m-9)^2$

يمثلُ كلُّ ثلاثيِّ حدودٍ ممَّا يأتي مساحةَ مستطيلٍ بالمتِرِ المربعِ. أجدُ مقدارَينِ جبريَّينِ يمثلانِ طولاً وعرضاً ممكنينِ لكلِّ مستطيلٍ.

16 $x^2 + x - 72$
 $(x+9), (x-8)$

17 $x^2 - 8x - 9$
 $(x-9), (x+1)$

18 $x^2 + 2x - 48$
 $(x+8), (x-6)$

أحلُّ كلَّ ممَّا يأتي:

19 $3x^3y + 18x^2y - 21xy$
 $3xy(x+7)(x-1)$

20 $2x^3 - 2x^2 - 4x$
 $2x(x-2)(x+1)$

21 $2x^3 - 4x^2 - 6x$
 $2x(x-3)(x+1)$

22 $5x^3y - 35x^2y + 50xy$
 $5xy(x-5)(x-2)$

23 $3x^3 + 12x^2 + 9x$
 $3x(x+3)(x+1)$

24 $4x^3 - 8x^2 - 12x$
 $4x(x-3)(x+1)$

إرشادٌ

أولاً: أخرج العاملَ المشتركَ الأكبرَ للحدودِ الثلاثة، ثُمَّ أحلُّ.

إرشاد

مؤسسة الحسين للسرطان
مكرسة لمكافحة مرض
السرطان، وتتضمن
مهامها: جمع التبرعات،
وحشد الجهود لمكافحة
السرطان، وتنفيذ برامج
الوقاية منه، والكشف
المبكر عنه.

25

صحفة: تقوم مؤسسة الحسين للسرطان بحملة توعية بأهمية الفحص المبكر للسرطان، عن طريق لوحات إعلانية مستطيلة الشكل على الطرقات. إذا كانت مساحة إحدى هذه اللوحات $(x^2 + 14x + 48)$ متراً مربعاً وعرضها $(x + 6)$ متراً، فأجد طول اللوحة ومحيطها بدلالة (x) . **الطول $(x+8)$ ، المحيط $(4x + 28)$**



ورق صحي: علبة ورق صحي على شكل متوازي مستطيلات، حجمه $x^3 + 5x^2 + 4x$ سنتيمتراً مكعباً. أجد قياساً ممكناً لكل من طول العلبة وعرضها وارتفاعها بدلالة x .
الطول $(x + 4)$ ، العرض $(x+1)$ ، الارتفاع x

26

مهارات التفكير العليا

تبرير: أجد 3 قيم ممكنة للعدد الصحيح m في كل مما يأتي، بحيث يكون ثلاثي الحدود قابلاً للتحليل، ثم أحلله:

قيم ممكنة $m = -2, 2, 14$

27 $x^2 + mx - 15$

قيم ممكنة $m = 6, 12, -18$

28 $x^2 - 7x + m$

أنظر تحليل الطلبة.

تحذ: أحلل المقدار $(x-3)^2 - 2(x-3) - 8$ بفرض $y = x - 3$

$$y^2 - 2y - 8 = (y-4)(y+2) = (x-7)(x-1)$$

تحذ: في الشكل المجاور مستطيل بعده $x+a$ ، $x+b$ ، قسّم إلى أربعة أجزاء مساحة اثنين منها x^2 و 6 وحدات مربعة، أبين أنه توجد قيمتان ممكنتان لكل من a و b .

x^2	
	6

29

إرشاد

يمكنني فك الأقواس ثم التحليل، ويمكنني أيضاً فرض أن $y = x - 3$ وإتمام الحل.

30

أكتشف الخطأ: حلل كل من آدم وماريا العبارة $y^2 + 6y - 16$ على النحو الآتي:

ماريا
 $y^2 + 6y - 16 = (y + 2)(y - 8)$

آدم
 $y^2 + 6y - 16 = (y - 2)(y + 8)$

تحليل آدم صحيح. أبحث عن عددين حاصل من منهما إجابتها صحيحة؟ أبرر إجابتي. ضربهما -16 ومجموعهما 6 وهما $-2, 8$

31

30) $a = 2, b = 3, (x+2)(x+3)$
 $a = 1, b = 6, (x+1)(x+6)$

32

أكتب: كيف أحدد قيمة كل من m و n عند تحليل $y^2 - 3y - 4$ على صورة $(y + m)(y + n)$ ؟ أبحث عن عددين حاصل ضربهما -4 ومجموعهما -3 وهما $-4, 1$

أستكشف



يُستعمل المقدار الجبري

$$\frac{1}{2} dv^2 - \frac{1}{2} du^2$$

الفرق بين قيمتي الضغط الجوي فوق جناح الطائرة وأسفله، حيث d هي كثافة الهواء و v سرعة الهواء فوق الجناح و u سرعة الهواء أسفله. كيف أحل هذا المقدار الجبري تحليلًا كاملاً؟

تحليل

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

تبسيط

تعلمت سابقاً كيفية ضرب مقدارين جبريين على صورة $(a-b)(a+b)$ ، حيث يكون الناتج دائماً فرقا بين مربعين على صورة $a^2 - b^2$. ولتحليل الفرق بين مربعين يمكن اتباع خطوات عكسية لعملية ضرب مجموع حدّين في الفرق بينهما.



فكرة الدرس

• أحلّ مقداراً جبرياً يمثل فرقا بين مربعين.

• أحلّ مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود.

المصطلحات

مربع كامل ثلاثي الحدود.

تحليل الفرق بين مربعين

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** الفرق بين مربعي حدّين يساوي ناتج ضرب مجموع الحدّين في الفرق بينهما.

• **بالرموز:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

مثال 1

أحلّ كلاً ممّا يأتي:

1 $x^2 - 25$

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= x^2 - 5^2 \\ &= (x - 5)(x + 5) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
أحلّ الفرق بين مربعين

2 $4y^2 - 9z^2$

$$\begin{aligned} 4y^2 - 9z^2 &= (2y)^2 - (3z)^2 \\ &= (2y - 3z)(2y + 3z) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
أحلّ الفرق بين مربعين

أتحقق من فهمي: ✓

3 $x^2 - 100$
 $(x-10)(x+10)$

4 $100y^2 - 36$
 $(10y-6)(10y+6)$

5 $81d^2 - 49r^2$
 $(9d-7r)(9d+7r)$

6 $64c^2 - 1$
 $(8c-1)(8c+1)$

يحتاج تحليل بعض المقادير الجبرية إلى إجراء خطوتين، مثل إخراج العامل المشترك الأكبر للحدود جميعها، ثم تحليل ما تبقى من المقدار باستعمال قاعدة تحليل الفرق بين مربعين.

مثال 2

أحلل كلاً مما يأتي:

1 $27xy^3 - 3xy$

$$\begin{aligned} 27xy^3 - 3xy &= 3xy(9y^2 - 1) \\ &= 3xy(3y - 1)(3y + 1) \end{aligned}$$

أحلل بإخراج العامل المشترك الأكبر
أحلل المقدار $9y^2 - 1$ كفرق بين مربعين

2 $y^4 - 1$

$$\begin{aligned} y^4 - 1 &= (y^2)^2 - (1)^2 \\ &= (y^2 - 1)(y^2 + 1) \\ &= (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) \end{aligned}$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$
أحلل الفرق بين مربعين
أحلل المقدار $y^2 - 1$ كفرق بين مربعين

3 $2b^2 - 18 + ab^2 - 9a$

$$\begin{aligned} 2b^2 - 18 + ab^2 - 9a &= (2b^2 - 18) + (ab^2 - 9a) \\ &= 2(b^2 - 9) + a(b^2 - 9) \\ &= (b^2 - 9)(2 + a) \\ &= (b - 3)(b + 3)(2 + a) \end{aligned}$$

أجمع الحدود ذات العامل المشترك
أحلل كل تجميع بإخراج العامل المشترك
أخرج المقدار $(b^2 - 9)$ عاملاً مشتركاً
أحلل المقدار $(b^2 - 9)$ كفرق بين مربعين

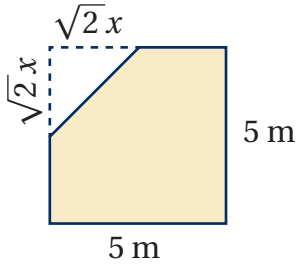
أتحقق من فهمي: ✓

4 $b^4 - c^4$
 $(b-c)(b+c)(b^2+c^2)$

5 $6w^3 - 24w$
 $6w(w-2)(w+2)$

6 $4m^4 - 9m^2 + 8m^2k - 18k$
 $(2m - 3)(2m + 3)(m^2 + 2k)$

الوحدة 2



أنتذكر

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a, a \geq 0$$

هندسة معمارية: يبين الشكل المجاور مخطط غرفة جلوس في منزلٍ رغدًا. أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة الغرفة، ثم أحلله. مساحة الغرفة تساوي ناتج طرح مساحة المثلث من مساحة المربع.

الخطوة 1 أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة الغرفة:

$$\begin{aligned} A_1 &= s^2 && \text{مساحة المربع} \\ &= (5)^2 = 25 && \text{بتعويض } s = 5 \\ A_2 &= \frac{1}{2}bh && \text{مساحة المثلث} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = x^2 && \text{بتعويض } b = x, h = x \\ A &= A_1 - A_2 && \text{مساحة الغرفة} \\ &= 25 - x^2 && \text{بالتعويض} \end{aligned}$$

إذن، مساحة الغرفة تساوي $25 - x^2$ مترًا مربعًا.

الخطوة 2 أحلّل المقدار $25 - x^2$

$$25 - x^2 = 5^2 - x^2$$

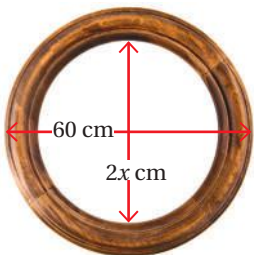
$$= (5 - x)(5 + x)$$

أكتب المقدار على صورة $a^2 - b^2$

أحلّل الفرق بين مربعين

$$25 - x^2 = (5 - x)(5 + x), \text{ إذن}$$

أتحقق من فهمي:



أعمال فنية: صنع مراد إطار صورة خشبيًا دائريًا كما في الشكل المجاور. أكتب مقدارًا جبريًا يمثل مساحة الإطار الخشبي، ثم أحلله.

$$\pi(30-x)(30+x)$$

تعلمت سابقاً أن أعداداً مثل 25, 49, 64 تسمى مربعاتٍ كاملة؛ لأنَّ كلاً منها يساوي ناتج ضربٍ عددٍ في نفسه:

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

$$49 = 7 \times 7 = 7^2$$

$$64 = 8 \times 8 = 8^2$$

ويعدُّ المقدار الجبريُّ الذي على صورة $(a + b)^2$ مربعاً كاملاً أيضاً؛ لأنَّه يساوي ناتج ضرب $(a + b)$ في نفسه. وتعلمت في الدرس الأول من هذه الوحدة أنَّ تبسيط $(a + b)^2$ و $(a - b)^2$ يتبع قاعدة ثابتة، وأنَّ النتيجة تكون دائماً مقداراً جبرياً يحتوي ثلاثة حدودٍ كما يأتي:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

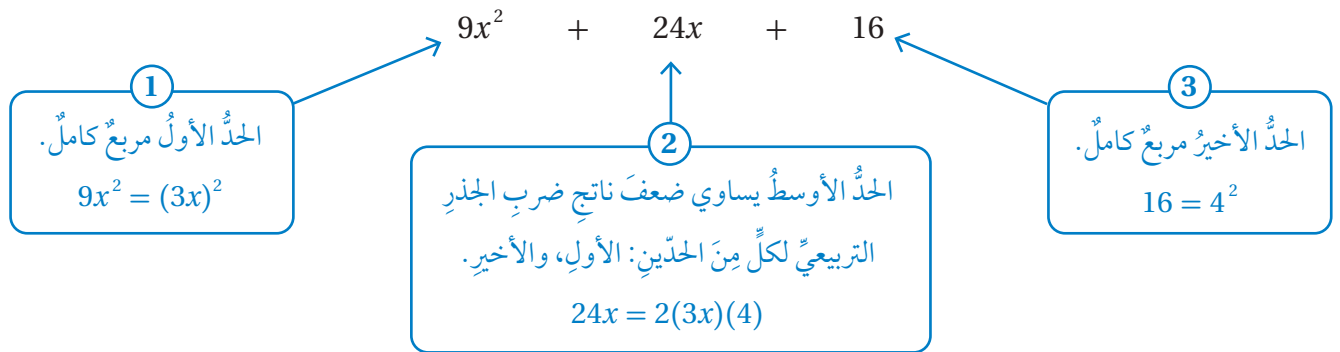
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

يسمى ناتج الضرب في كلِّ من الحالتين أعلاه **مربعاً كاملاً ثلاثي الحدود** (perfect-square trinomial)؛ لأنَّه ينتج من ضربٍ مقدارٍ جبريٍّ في نفسه، ويمكنُ بطريقةٍ عكسيةٍ تحليلُ أيِّ ثلاثيِّ حدودٍ على صورة $a^2 + 2ab + b^2$ إن كان يمثلُ مربعاً كاملاً إذا حققَ الشروطَ الثلاثة الآتية:



تحليلُ المربعِ الكاملِ الثلاثيِّ الحدودِ

مفهومٌ أساسيٌّ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b) \quad \bullet \text{ بالرموز:}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) \quad \bullet \text{ مثال:}$$

$$25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2 = (5x - 3)(5x - 3)$$

أحدُ ما إذا كانت كلُّ ثلاثية حدودٍ ممّا يأتي تمثل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت تمثلها فأحلّها:

1 $x^2 + 6x + 9$

• هل الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم

• هل الحدُّ الأوسطُ يساوي $2 \times x \times 3$ ؟ نعم؛ لأنَّ $6x = 2(x)(3)$

• هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $9 = 3^2$

بما أنَّ الشروطَ جميعها متحققة، فإنَّ $x^2 + 6x + 9$ تشكّل مربعاً كاملاً.

$$x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \quad \text{أكتبُ بصورة } a^2 + 2ab + b^2$$

$$= (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) \quad \text{أحلُّ$$

2 $x^2 + 2x + 16$

• هل الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم

• هل الحدُّ الأوسطُ يساوي $2 \times x \times 4$ ؟ لا؛ لأنَّ $2x \neq 2(x)(4)$

• هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $16 = 4^2$

بما أنَّ الشرطَ الثانيَ غيرُ متحقّقٍ، فإنَّ $x^2 + 2x + 16$ ليستُ مربعاً كاملاً، ولا يمكنُ تحليله.

أتحقق من فهمي: 

3 $x^2 - 24x + 144$
مربع كامل $(x-12)^2$

4 $4x^2 - 12x + 9$
مربع كامل $(2x-3)^2$

5 $x^2 + 10x + \frac{1}{25}$
ليست مربعاً كاملاً، ولا يمكنُ تحليلها.

حين لا تُساوي قيمة العامل المشترك الأكبر لحدود المقدار الجبري 1، فإنَّ من الأسهل البدء بإخراج العامل المشترك الأكبر، ثمَّ اختيار طريقة التحليل المناسبة بحسب الترتيب المبيّن في الجدول الآتي:



طريقة التحليل	عدد الحدود الجبرية
	2 أو أكثر
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	2
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	3
$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$ $m + n = b$ and $mn = c$	3
$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$	4 أو أكثر

أُتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلاً ممَّا يأتي:

- | | | |
|--|---|-----------------------------------|
| 1 $u^2 - 64$
$(u-8)(u+8)$ | 2 $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{25}$
$(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5})(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5})$ | 3 $36y^2 - 1$
$(6y-1)(6y+1)$ |
| 4 $v^4 - 625r^2$
$(v^2-25r)(v^2+25r)$ | 5 $a^2 - w^2z^2$
$(a-wz)(a+wz)$ | 6 $-16y^2 + 49$
$(7-4y)(7+4y)$ |

أحلُّ كلاً ممَّا يأتي:

- | | |
|---|---|
| 7 $ab^2 - 100a$
$a(b-10)(b+10)$ | 8 $x - x^3$
$x(1-x)(1+x)$ |
| 9 $12b^3 + 2b^2 - 192b - 32$
$2(6b+1)(b-4)(b+4)$ | 10 $d^3 - 5d^2 - 100d + 500$
$(d-5)(d-10)(d+10)$ |

أحدُّ أن كلَّ ثلاثية حدودٍ ممَّا يأتي تمثل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت تمثلها فأحلُّها:

- | | |
|--|---|
| 11 $w^2 - 18w + 81$
مربع كامل $(w-9)^2$ | 12 $x^2 + 2x - 1$
ليس مربعاً كاملاً |
| 13 $y^2 + 8y + 16$
مربع كامل $(y+4)^2$ | 14 $9x^2 - 30x + 10$
ليس مربعاً كاملاً |

أتذكر

أتذكرُ أن:

$$a^2 - b^2 = -b^2 + a^2$$

الوحدة 2

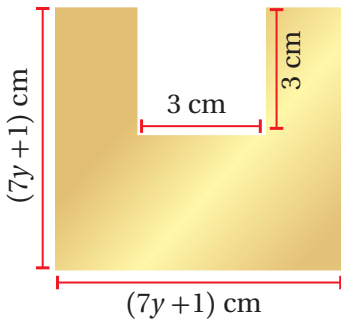
أحلل كلاً ممّا يأتي:

15 $3t^3 + 24t^2 + 48t$
 $3t(t + 4)^2$

17 $27g^2 - 90g + 75$
 $3(3g - 5)^2$

19 $5x^2 - 60x + 180$
 $5(x - 6)^2$

21 $12x^2 - 84x + 147$
 $3(2x - 7)^2$

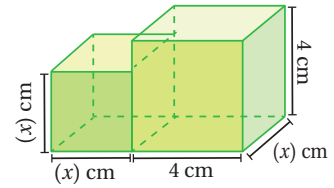


23 **نحاس:** يبيّن الشكل المجاور صفيحةً من النحاس قبل صهرها وتحويلها إلى مستطيل له المساحة نفسها، أجد قياسين ممكنين لطول المستطيل وعرضه بدلالة y .

$(7y - 2), (7y + 4)$

24 يبيّن الشكل المجاور مخططاً لمستودعي تخزين متجاورين. أكتب مقداراً جبرياً يمثل الفرق بين حجمي المستودعين، ثمّ أحلّه.

$x(4 - x)(4 + x)$



25 **تحذّر:** مثلث قائم الزاوية مساحته $9y^2 - 16$ وحدة مربعة. أجد قياسين ممكنين لطول قاعدته وارتفاعه بدلالة y .

$2(3y - 4), (3y + 4)$

26 **أكتشف الخطأ:** حلل إبراهيم المقدار

$n^2 - 64 = n^2 - 8^2$
 $= (n-8)^2$



$n^2 - 64$ تحليلاً كاملاً على النحو الآتي:

هل إجابته صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

27 **تبرير:** أصف طريقتين لتبسيط $(2x-5)^2 - (x-4)^2$ ، وأبيّن أيّ الطريقتين أسهل، مبرراً إجابتي. أنظر الهامش.

28 **أكتب** طريقة تحليل فرق بين مربعين. أنظر إجابات الطلبة.

معلومة

درجة الانصهار هي درجة الحرارة التي تتحوّل عندها المادة من الحالة الصلبة إلى الحالة السائلة، ودرجة انصهار النحاس 1085°C



مهارات التفكير العليا

أستكشف



يمثل المقدار الجبري $x^3 + 5x^2 + 4x$ حجم حجر بناءٍ عازلٍ للحرارةٍ بالسنتيمتر المكعب. إذا كانت مساحة قاعدة الحجر $(x^2 + x)$ سنتيمترًا مربعًا، فأجد ارتفاعه بدلالة x .

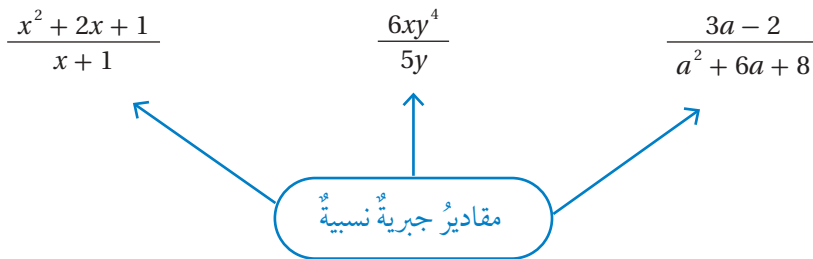
فكرة الدرس

أكتب مقادير جبرية نسبية في أبسط صورة.

المصطلحات

المقدار الجبري النسبي.

المقدار الجبري النسبي (rational algebraic expression) هو كسر بسطه ومقامه مقداران جبريان.



يكون المقدار الجبري النسبي في أبسط صورة إذا كان العامل المشترك الأكبر لكل من بسطه ومقامه يساوي 1

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

مثال 1

1 $\frac{-5x^2 y^3}{20x^4 y}$

$$\begin{aligned} \frac{-5x^2 y^3}{20x^4 y} &= \frac{(5x^2 y)(-y^2)}{(5x^2 y)(4x^2)} \\ &= \frac{\cancel{5x^2 y}(-y^2)}{\cancel{5x^2 y}(4x^2)} \\ &= \frac{-y^2}{4x^2} \end{aligned}$$

العامل المشترك الأكبر للبسط والمقام يساوي $(5x^2 y)$

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(5x^2 y)$

أبسط

أتحقق من فهمي:



2 $\frac{35yz^2}{14y^2z} \cdot \frac{5z}{2y}$

3 $\frac{14a^3 b^2}{42ab^3} \cdot \frac{a^2}{3b}$

الوحدة 2

يمكنني استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها في الدروس السابقة لاختصار أيّ عواملٍ مشتركةٍ لكلٍّ من بسط المقدار الجبريِّ النسبيِّ ومقامه.

مثال 2 أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{6x + 12}{6}$

$$\frac{6x + 12}{6} = \frac{6(x + 2)}{6}$$

$$= (x + 2)$$

أخرج العدد (6) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أقسم كلاً من البسط والمقام على (6)

2 $\frac{2x^2 + 2x}{2x}$

$$\frac{2x^2 + 2x}{2x} = \frac{2x(x + 1)}{2x}$$

$$= \frac{\cancel{2x}(x + 1)}{\cancel{2x}} = x + 1$$

أخرج (2x) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أقسم البسط والمقام على (2x)

3 $\frac{x - 1}{x^3 - x^2}$

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2} = \frac{x - 1}{x^2(x - 1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x - 1)}}{x^2\cancel{(x - 1)}} = \frac{1}{x^2}$$

أحلل المقام

أقسم كلاً من البسط والمقام على (x-1)

أنتحقق من فهمي:



4 $\frac{2x + 2}{2} \quad x + 1$

5 $\frac{16x^2 + 8x}{2x + 1} \quad 8x$

6 $\frac{x - 2x^2}{8 - 16x} \quad \frac{x}{8}$

يمكن استعمال طريقة التجميع - التي تعلمتها سابقاً - في هذه الوحدة لتحليل بسط المقدار الجبريِّ النسبيِّ أو مقامه أو كليهما واختصار أيّ عواملٍ مشتركةٍ لهما. وعند تحليل بسط المقدار الجبريِّ النسبيِّ ومقامه ألاحظ أحياناً وجود معكوس بعض العوامل، فمثلاً (6-x) - هو معكوس (6-x)؛ لأن (6-x) = -1(x-6)؛ لذا أكتب $\frac{(6-x)}{(x-6)}$ على صورة $\frac{-1(x-6)}{(x-6)}$

مثال 3

أكتبُ كلاً ممَّا يأتي في أبسط صورة:

$$1 \quad \frac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y}$$

$$\frac{5xy - 10x + 2y - 4}{2 - y} = \frac{(5xy - 10x) + (2y - 4)}{2 - y}$$

$$= \frac{5x(y-2) + 2(y-2)}{2 - y}$$

$$= \frac{(y-2)(5x+2)}{(2-y)}$$

$$= \frac{(y-2)(5x+2)}{-(y-2)}$$

$$= \frac{\cancel{(y-2)}(5x+2)}{\cancel{-(y-2)}} = -(5x+2)$$

أجمعُ الحدود ذات العامل المشترك

أحللُ كلَّ تجميعٍ بإخراج العامل المشترك الأكبر

أخرجُ $y - 2$ عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أكتبُ $(2-y)$ على صورة $-(y-2)$

أقسمُ كلاً من البسط والمقام على $(y-2)$

أتحقق من فهمي:



$$2 \quad \frac{2ab - 6b + 6 - 2a}{a - 3} \quad 2(b-1)$$

$$3 \quad \frac{5h - 3g}{3g^2 - 5gh + 3g - 5h} - \frac{1}{g+1}$$

تحتوي بعض المقادير الجبرية النسبية ثلاثيات حدود على الصورة $x^2 - bx + c$ أو مقادير جبرية على صورة فرق بين مربعين، ويمكنني استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها في الدروس السابقة لتحليل هذه المقادير الجبرية، واختصار أي عوامل مشتركة لكل من بسط المقادير الجبرية والنسبية ومقامه.

مثال 4

أكتبُ كلاً ممَّا يأتي في أبسط صورة:

$$1 \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x - 2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}} = x - 1$$

أحللُ ثلاثية الحدود

أقسمُ كلاً من البسط والمقام على $(x-2)$

الوحدة 2

$$2 \quad \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 16}$$

$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 16} = \frac{(x+2)(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$= \frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{(x-4)\cancel{(x+4)}} = \frac{x+2}{x-4}$$

أحلل ثلاثية الحدود في البسط والفرق بين المربعين في المقام

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(x + 4)$

$$3 \quad \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 5x}$$

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 5x} = \frac{(x+5)^2}{x^2 + 5x}$$

$$= \frac{(x+5)(x+5)}{x(x+5)}$$

$$= \frac{(x+5)\cancel{(x+5)}}{x\cancel{(x+5)}} = \frac{x+5}{x}$$

أحلل ثلاثية الحدود في البسط

أخرج x عاملاً مشتركاً لحدود المقام

أقسم كلاً من البسط والمقام على $(x + 5)$

أنتحق من فهمي: 

$$4 \quad \frac{x^2 - 12x + 36}{x - 6} \quad x - 6$$

$$5 \quad \frac{x^2 + 9x + 8}{x^2 - 64} \quad \frac{x+1}{x-8}$$

$$6 \quad \frac{x^2 + 8x + 16}{2x + 8} \quad \frac{x+4}{2}$$

يُستعمل تبسيط المقادير الجبرية النسبية في كثير من التطبيقات العلمية والهندسية.

مثال 5: من الحياة 



تحفظ عائشة ألعبها في صندوق على شكل متوازي مستطيلات حجمه $x^3 + 11x^2 + 10x$ ستيمتراً مكعباً وارتفاعه $(x + 1)$ ستيمتراً. أجد مساحة قاعدة الصندوق بدلالة x

حجم الصندوق V يساوي مساحة القاعدة B مضروباً في الارتفاع h . إذن، مساحة القاعدة تساوي ناتج قسمة الحجم على الارتفاع.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{V}{h} \\
 &= \frac{x^3 + 11x^2 + 10x}{(x+1)} \\
 &= \frac{x(x^2 + 11x + 10)}{(x+1)} \\
 &= \frac{x(x+10)(x+1)}{(x+1)} \\
 &= x(x+10)
 \end{aligned}$$

قانون مساحة القاعدة

أعوّض

أخرج (x) عاملاً مشتركاً لحدود البسط

أحلل ثلاثية الحدود التي داخل القوس

أبسط

إذن، مساحة قاعدة الصندوق $B = x(x+10)$ cm



✓ **أتحقق من فهمي:**

مخروط مثلجات حجمه $w^3 - 49w$ سنتيمتراً مكعباً، ومساحة قاعدته $w^2 + 7w$ سنتيمتراً مربعاً، أجد ارتفاعه بدلالة x .

$$3(w - 7)$$

أتحرب وأحل المسائل

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

1 $\frac{64qr^2s}{16q^2rs} \frac{4r}{q}$

2 $\frac{24a^3b^4c^7}{6a^6c^2} \frac{4b^4c^5}{a^3}$

3 $\frac{y^2+yz-y-z}{y+z} y-1$

4 $\frac{n^2-9}{n^2-5n+6} \frac{n+3}{n-2}$

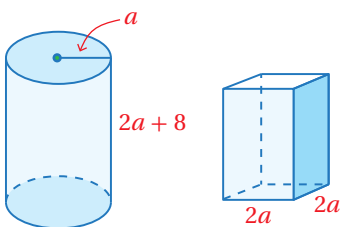
5 $\frac{x^2-x-30}{x^2-36} \frac{x+5}{x+6}$

6 $\frac{w^4-1}{1-w^2} -(w^2+1)$

7 $\frac{4x^3-12x^2+8x}{6x^3+6x^2-36x} \frac{2(x-1)}{3(x+3)}$

8 $\frac{x^2-81}{2x-18} \frac{x+9}{2}$

9 $\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+15} \frac{x-1}{x+5}$



10 **قياس:** يظهر في الشكل المجاور عبوتتا معلبات غذائية لهما الحجم نفسه. أجد ارتفاع العبوة التي على شكل متوازي مستطيلات بدلالة a .

الوحدة 2



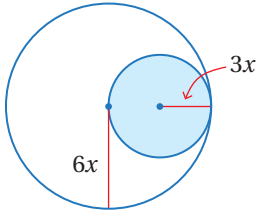
انتخابات: صندوق اقتراع على هيئة متوازي مستطيلات، حجمه $(x^3 - 8x^2 + 15x)$ سنتيمترًا مكعبًا، ومساحة قاعدته $(x^2 - 3x)$ سنتيمترًا مربعًا، أجد ارتفاع الصندوق.

$$x - 5$$

هندسة: المستطيل A طوله $(2x + 6)$ وحدة وعرضه $(3x)$ وحدة، والمستطيل B طوله $(x + 2)$ وحدة ومساحته تزيد بمقدار 12 وحدة مربعة على مساحة المستطيل A . أكتب مقدارًا جبريًا في أبسط صورة يمثل عرض المستطيل B . $6(x + 1)$

هندسة: أكتب في أبسط صورة النسبة المئوية لمساحة المنطقة المظللة من الشكل في كل مما يأتي:

13



$$\frac{9x^2 \pi}{36x^2 \pi} \times 100\% = \frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$$

تحذُّ: كتبت سوسن مقدارًا جبريًا نسبيًا بأبسط صورة، ثم انسكب بعض القهوة على أجزاء من الحل، هل يمكن تحديد المقدار الجبري الأصلي؟

$$\frac{4x^2 + 12x}{2x + 6} = \frac{4x(x+3)}{2(x+3)} = 2x$$

$$\frac{\text{شئ ما}}{\text{شئ ما}} = \frac{4x}{2(x+3)} = 2x$$

تحذُّ: مقدار جبري نسبي على صورة $\frac{x^2 + bx - c}{x^2 + d}$ ، وعند كتابته في أبسط صورة

يصبح $\frac{x-7}{x+2}$ ، هل يمكن تحديد قيمة كل من b, c, d ؟ $d = -4, b = -9, c = -14$

تحذُّ: أكتب المقدار الجبري الآتي في أبسط صورة:

$$\frac{m-n}{m+10n} \quad \frac{m^2 - n^2}{m^2 + 11mn + 10n^2}$$

أكتب: أكتب فقرةً أبين فيها كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية.

أنظر إجابات الطلبة.

معلومة

تأسست الهيئة المستقلة للانتخابات عام 2012 بوصفها جهةً مستقلةً تُعنى بإدارة الانتخابات في المملكة الأردنية الهاشمية والإشراف عليها.

12

$$\frac{25w^2}{\frac{1}{2}(14w)(5w)} \times 100\% =$$

$$\frac{5}{7} \times 100\% \approx 71.4\%$$

مهارات التفكير العليا

15

16

17

18

اختبار الوحدة

6 قطعة أرضٍ مستطيلة الشكل، مساحتها $(x^2+3x-10)$ وحدةً مربعةً، إذا كان أحد أبعادها $(x+5)$ وحدةً، فإنَّ بُعدها الآخر هو:

- a) $x-2$ b) $x+2$
c) $x-5$ d) $x+10$

7 $\frac{x^2-36}{6-x}$

- a) $-x-6$ b) $x-6$
c) $x+6$ d) $6-x$

8 تحليل المقدار w^4-1 إلى عوامله الأولية تحليلًا كاملاً:

- a) $(w-1)(w+1)$ b) $(w-1)(w+1)(w^2+1)$
c) $(w-1)(w^3+1)$ d) $(w-1)(w^2+2w+1)$

9 يقبل المقدار الجبري x^2-100 القسمة من دون باقٍ على:

- a) $x+100$ b) $x-5$
c) $x-100$ d) $x-10$

أكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة:

- 10 $(2x-7)(2x+7)$ 11 $(6y-3x)(6y-3x)$
 $4x^2-49$ $36y^2-36xy+9x^2$
12 $(x-4)^2$ 13 $(3d+6)^2$
 $x^2-8x+16$ $9d^2+36d+36$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ مما يأتي:

1 ناتج ضرب المقدار $(2x-4)(2x+4)$ يساوي:

- a) $2x^2-16$ b) $4x^2-16$
c) $4x^2+16$ d) $4x-16$

2 مربع طول ضلعيه $x-6$ وحدةً، فتكون مساحته:

- a) $x^2+12x-36$ b) x^2-36
c) $x^2-12x+36$ d) x^2+36

3 المقدار الجبري الذي يمثل مربعاً كاملاً هو:

- a) $y^2+26y+25$ b) $y^2-8y-16$
c) $y^2-8y+16$ d) y^2-25

4 قيمة b التي تجعل المقدار $(x^2+bx+144)$ مربعاً كاملاً هي:

- a) 16 b) -12
c) 12 d) -24

5 تحليل المقدار $4x^2y-4y$ إلى عوامله الأولية تحليلًا كاملاً:

- a) $4y(x-1)(x+1)$ b) $4y(x^2-1)$
c) $(2x-2)(2x+2)$ d) $(x-1)(x+1)$

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة:

26 $\frac{5x+15}{x^2+10x+21}$
 $\frac{5}{x+7}$

27 $\frac{2x^2+6x+4}{3x^2+9x+6}$ $\frac{2}{3}$

تدريب على الاختبارات الدولية

28 أي الآتيّ عاملانٍ لثلاثيّ الحدود x^2+x-42 ؟

a) $(x-7)(x-6)$ **b) $(x+7)(x-6)$**

c) $(x-7)(x+6)$ d) $(x+7)(x+6)$

29 عند كتابة المقدار الجبري $(2x+5)(2x-5)$ في أبسط صورة ينتج:

a) $4x^2-20x-25$ b) $4x^2+20x+25$

c) $4x^2-25$ d) $2x^2-5$

30 إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن حاصل ضرب عددٍ سابقٍ في عددٍ لاحقٍ له يُعطى بالعلاقة:

a) n^2-1 b) n^2+1

c) n^2-2 d) $(n+1)^2$

31 إذا كان $a-b=3$ ، $a^2-b^2=33$ ، فأجد قيمة $a+b$:

a) 14 b) 30 c) 36 **d) 11**

أحلل كلّ مقدارٍ جبريٍّ ممّا يأتي تحليلًا كاملاً:

14 $3yw^2-12y+2w^2-8$ $(w-2)(w+2)(3y+2)$

15 $x^2-10x+25$
 $(x-5)^2$

16 $9y^2-4$
 $(3y-2)(3y+2)$



17 يبيّن الشكل المجاور مهبطًا للطائرات العمودية في إحدى المستشفيات، فإذا كان طول

نصف قطر الدائرة الصغرى يقلُّ 8 أمتارٍ عن طول نصف قطر الدائرة الكبرى، فأكتب مقدارًا جبريًا يمثل الفرق بين مساحتي الدائرتين، ثمّ أحلله تحليلًا كاملاً. **أنظر الهامش.**

18 **كرة قدم:** ملعب كرة قدم مساحته $(x^2-28x-29)$

متراً مربعاً، وطوله $x+1$ متراً، أجد محيطه بدلالة x . عرض الملعب $(x-29)$ متر، محيط الملعب $(4x-56)$ متر. أحلّل كلاً من المقدارين الجبريين الآتيين تحليلًا كاملاً:

19 $4s^2-s+12st-3t$ $(4s-1)(s+3t)$

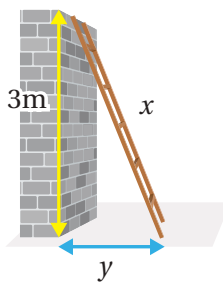
20 $6m^3-12mn+m^2n-2n^2$ $(m^2-2n)(6m+n)$

21 $x^2-18x+72$
 $(x-12)(x-6)$

22 $3x^2-48$
 $3(x-4)(x+4)$

23 $100-(x+9y)^2$
 $(10-x-9y)(10+x+9y)$

24 $3x^2-15x+18$
 $3(x-6)(x+1)$



25 يستند سلمٌ إلى حائطٍ كما في الشكل المجاور. إذا كان طول السلم x وارتفاع الحائط 3m، فأجد المقدار الجبري الذي يمثل مربع المسافة الأفقية بين الحائط والسلم، ثمّ أحلله.

$y^2 = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

المعادلات الخطية بمتغيرين

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل المعادلات الخطية في نمذجة المواقف العلمية والحياتية، ويقدم لنا مفهوم ميل منحنى المعادلة الخطية تفسيراً لكيفية تغير كمية بالنسبة إلى كمية أخرى، مثل تحديد شدة انحدار الطرق بإيجاد نسبة تغير الارتفاع إلى المسافة الأفقية المقطوعة؛ وذلك لتنبيه السائقين على الحذر عند القيادة في الطرق الشديدة الانحدار، مثل طريق وادي الموجب جنوب الأردن.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- إيجاد ميل الخط المستقيم.
- إيجاد معادلة الخط المستقيم بطرائق متعددة.
- العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين ومتعامدين.

تعلمت سابقاً:

- ✓ التعبير عن الاقتران الخطي بطرائق متعددة.
- ✓ تمثيل الاقتران الخطي بيانياً.
- ✓ تمثيل التناسب الطردي بيانياً أو في جدول.



مشروع الوحدة: المعادلات الخطية والخريطة

- استعمل الرمز m بدلاً من الرمز a في مربع الحوار ليدل على الميل، ثم أعدد أقل قيمة وأعلى قيمة للميل (مثلاً أقل قيمة -20 وأعلى قيمة 20).

4 أكرّر الخطوة السابقة لإدراج مؤشر للتحكم في قيمة المقطع y ، واستعمل الرمز b بدلاً من الرمز a .

5 أكتب في شريط الإدخال معادلة المستقيم بصورة الميل والمقطع $(y = mx + b)$ ؛ ليظهر تمثيل بياني لمستقيم.

6 أحرّك مؤشر الميل ومؤشر المقطع y لتغيّر موقع الخط؛ ليمرّ بمحافظتين أختارهما (مثلاً: الزرقاء والكرّك)، ثم أجد ميل المستقيم المارّ بالمحافظتين والمقطع y له من خلال المعادلة في شريط الإدخال.

7 لتغيير صورة المعادلة إلى الصورة القياسية؛ أنقرّ بزرّ الفأرة الأيمن على صيغة المعادلة في شريط الإدخال، ثم أختار الصورة القياسية للمعادلة من القائمة المنسدلة.

8 أرسّم مستقيماً آخر في المستوى موازياً للمستقيم السابق مع الانتباه إلى اختيار رمزين آخرين للدلالة على الميل والمقطع y ، ثم أحرّكه حتى يمرّ في إحدى المحافظات على الخريطة، وأعدد معادلته وميله والمقطع y له.

9 أكرّر الخطوات السابقة مع محافظات أخرى.

عرض النتائج:

أعدّ مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً (بوربوينت) نبين فيه خطوات العمل في المشروع، والنتائج التي توصلنا إليها موضحةً بالصور، ثم نعرضه على الزملاء / الزميلات في مختبر الحاسوب.

استعدّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص الذي سنوظّف فيه ما نتعلّمه في هذه الوحدة عن تمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين.

خطوات تنفيذ المشروع:

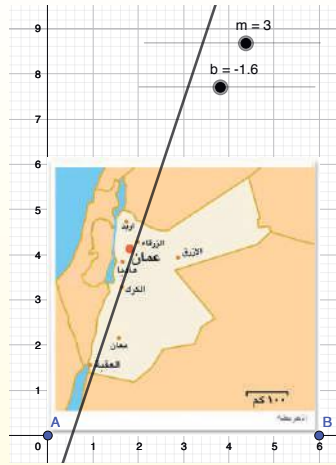
1 أبحث مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن خريطة المملكة الأردنية الهاشمية، ثم أحفظها على جهاز الحاسوب.

2 استعمل برمجية جيو جيبرا لتمثيل معادلات خطية تربط بعض المحافظات الأردنية إحداها بالأخرى من خلال الخطوات الآتية:


• أنقرّ على أيقونة  من شريط الأدوات، ثم أختار صورة خريطة الأردن.

• أعدل موقع صورة الخريطة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحريك النقطتين A و B اللتين تظهران عليها.

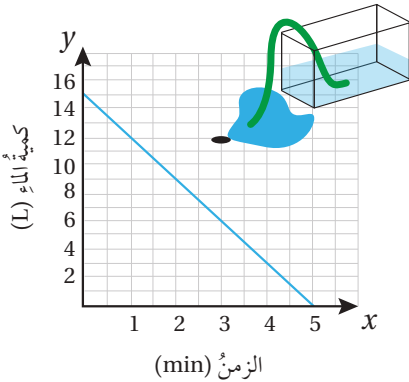
3 لإدراج مؤشر للتحكم في قيمة الميل أتبع الإجراءات الآتية:



• أنقرّ على أيقونة

 Slider من

شريط الأدوات، ثم أنقرّ على الموقع الذي أريدّه في الشاشة ليظهر مربع حوار.



أستكشف

يُبينُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ العلاقةَ بينَ كميةِ الماءِ المتبقيةِ في حوضٍ بالتراتِ والزمنِ المنقضيِ بالدقائقِ منذُ بدءِ تصريفِ الماءِ منَ الحوضِ.

1 ما كميةُ الماءِ التي كانت في الحوضِ عندَ بدءِ التصريفِ؟

2 كم دقيقةً يحتاجُ إليها تصريفُ الحوضِ من الماءِ تصريفًا كاملاً؟

فكرة الدرس

- أتعرّف الصيغة القياسية للمعادلة الخطية.
- أمثل المعادلة الخطية بيانياً.

المصطلحات

الصورة القياسية، الحد الثابت، المقطع x ، المقطع y

المعادلة الخطية هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة $Ax + By = C$ ، وتسمى الصورة القياسية (standard form) للمعادلة الخطية.

الصورة القياسية للمعادلة الخطية

مفهوم أساسي

- بالكلمات: الصورة القياسية للمعادلة الخطية هي:

$$Ax + By = C$$

حيث $A \geq 0$ ، ولا تكون قيمتا A و B معاً صفراً، حيث A, B, C أعداد صحيحة، العامل المشترك الأكبر لها 1.

مثال 1

أحدّد ما إذا كانت كل معادلة ممّا يأتي خطية أم لا، وإذا كانت كذلك أكتبها على الصورة القياسية.

1 $y = 6 - 5x$

أعيد كتابة المعادلة بحيث يكون كلا المتغيرين في الطرف نفسه من المعادلة.

$$y = 6 - 5x$$

المعادلة الأصلية

$$y + 5x = 6 - 5x + 5x$$

أضيف $5x$ إلى طرفي المعادلة

$$5x + y = 6$$

أبسط

المعادلة $5x + y = 6$ معادلة خطية بالصورة القياسية، حيث $A = 5, B = 1, C = 6$.

الوحدة 3

2 $3xy - 4x = 7$

بما أن الحد $3xy$ فيه متغيران، فإنه لا يمكن كتابة المعادلة على الصورة $Ax + By = C$ ، إذن فالمعادلة ليست خطية.

3 $4x - 8y = 12$

بما أن العامل المشترك الأكبر للأعداد 4 و 8 و 12 ليس 1، فإن المعادلة ليست مكتوبة بالصورة القياسية.

ولكتابتها بالصورة القياسية؛ أقسم كل طرف على ع. م. أ. للأعداد 4 و 8 و 12

$$4x - 8y = 12$$

المعادلة الأصلية

$$4(x - 2y) = 12$$

أجد (ع. م. أ.) وهو 4

$$\frac{4(x - 2y)}{4} = \frac{12}{4}$$

أقسم طرفي المعادلة على 4

$$x - 2y = 3$$

أبسط

إذن، فالمعادلة $x - 2y = 3$ خطية مكتوبة بالصورة القياسية، حيث $A = 1, B = -2, C = 3$.

4 $\frac{7}{5}x = -4$

لتحويل معاملات المعادلة إلى أعداد صحيحة، أضرب طرفي المعادلة في 5

$$\frac{7}{5}x = -4$$

المعادلة الأصلية

$$5 \times \left(\frac{7}{5}\right)x = 5(-4)$$

أضرب طرفي المعادلة في 5

$$7x = -20$$

أبسط

ويمكن كتابة المعادلة $7x = -20$ بالصورة القياسية وهي: $7x + 0y = -20$

إذن، فالمعادلة خطية بالصورة القياسية، حيث $A = 7, B = 0, C = -20$

أتحقق من فهمي: 

5 $2x = 1 - 3y$

خطية، $2x + 3y = 1$

6 $x^2 - 8y = 3$

ليست خطية

7 $\frac{1}{5}y = 2$

خطية، $0x + y = 10$

التمثيل البياني للمعادلة الخطية هو مستقيم يمر في النقاط جميعها التي تمثل حلولاً للمعادلة، وأي نقطة تقع على هذا المستقيم تمثل حلاً للمعادلة.

التفكير

حلُّ المعادلة الخطية هو الزوج المرتب الذي ينتج عن تعويضه في المعادلة عبارة صحيحة.

يمكن تمثيل المعادلة بإنشاء جدول قيم، وذلك باختيار قيم للمتغير x وتعويضها في المعادلة لإيجاد قيم y المقابلة لها، ثم تمثيل الأزواج المرتبة الناتجة في المستوى الإحداثي.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $2x - y = 1$ بيانياً.

الخطوة 1 أحل المعادلة بالنسبة إلى y ؛ لتسهيل عملية إيجاد قيم y المقابلة لقيم x .

$$2x - y = 1$$

$$2x - y - 2x = 1 - 2x$$

$$\frac{-y}{-1} = \frac{1-2x}{-1}$$

$$y = 2x - 1$$

المعادلة الأصلية

أطرح $2x$ من كلا الطرفين

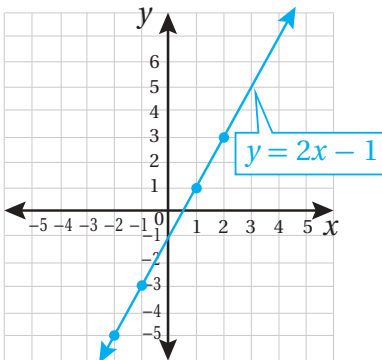
أقسم طرفي المعادلة على -1

أبسط

الخطوة 2 أنشئ جدول قيم.

أختار قيماً للمتغير x ، ثم أعوضها في المعادلة لأجد قيم y المقابلة لها.

x	$2x - 1$	y	(x, y)
-2	$2(-2) - 1$	-5	$(-2, -5)$
-1	$2(-1) - 1$	-3	$(-1, -3)$
0	$2(0) - 1$	-1	$(0, -1)$
1	$2(1) - 1$	1	$(1, 1)$
2	$2(2) - 1$	3	$(2, 3)$



الخطوة 3 أمثل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يمرُّ بها جميعاً.

أنا أعلم

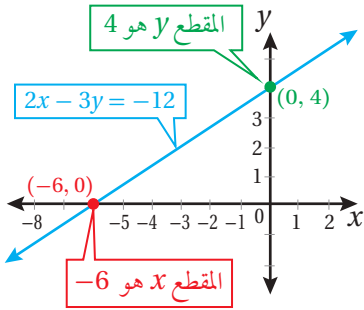
عند تمثيل المعادلة بيانياً، أستعمل الأسهم لتوضيح أن المستقيم غير مُنتهي.

الوحدة 3

تحقق من فهمي: (2-3) أنظر ملحق الإجابات.

2 أمثل المعادلة $y = 3x$ بيانيًا.

3 أمثل المعادلة $2y - 4x = 6$ بيانيًا.



بما أنه يمكن تمثيل المستقيم بنقطتين، فإنَّ أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطية هي إيجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين (إن أمكن).

يُسمى الإحداثي x للنقطة التي يقطع عندها المستقيم المحور x المقطع x (x -intercept)، ويُسمى الإحداثي y للنقطة التي يقطع عندها المستقيم المحور y المقطع y (y -intercept).

مثال 3

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانيًا باستعمال المقطع x والمقطع y :

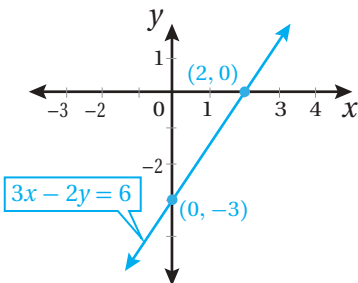
1 $3x - 2y = 6$

الخطوة 1 أجد المقطع x والمقطع y .

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 3(0) - 2y &= 6 && \text{أعوّض } x = 0 \\ -2y &= 6 && \text{أقسم كلا الطرفين على } -2 \\ \frac{-2y}{-2} &= \frac{6}{-2} && \\ y &= -3 && \text{أبسّط} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 3x - 2(0) &= 6 && \text{أعوّض } y = 0 \\ 3x &= 6 && \text{أقسم كلا الطرفين على } 3 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} && \\ x &= 2 && \text{أبسّط} \end{aligned}$$

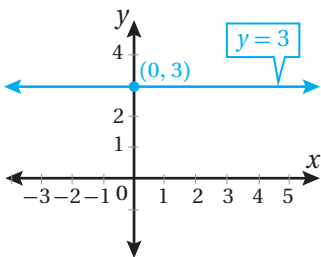
إذن، فالمقطع x هو 2، والمقطع y هو -3.



الخطوة 2 أمثل نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يصل بين النقطتين.

بما أن المقطع x هو 2، فإنَّ المستقيم يقطع المحور x في النقطة $(2, 0)$ ، وبما أن المقطع y هو -3، فإنَّ المستقيم يقطع المحور y في النقطة $(0, -3)$ ، أمثل النقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يصل بينهما.

2 $y = 3$



الخطوة 1 أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

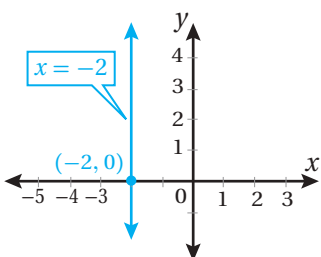
$y = 3$ المعادلة الأصلية

$0x + 1y = 3$ الصورة القياسية للمعادلة

الخطوة 2 أجد المقطع x والمقطع y .

ألاحظ أن المقطع y هو 3، ولا يوجد مقطع x ، وألاحظ أيضًا أن قيمة $y = 3$ لأي قيمة x ؛ لذا فإن التمثيل البياني للمعادلة $y = 3$ هو مستقيم أفقي يقطع المحور y في النقطة $(0, 3)$.

3 $x = -2$



الخطوة 1 أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

$x = -2$ المعادلة الأصلية

$1x + 0y = -2$ الصورة القياسية للمعادلة

الخطوة 2 أجد المقطع x والمقطع y .

ألاحظ أن المقطع x هو -2، ولا يوجد مقطع y ، وألاحظ أيضًا أن قيمة $x = -2$ لأي قيمة y ؛ لذا فإن التمثيل البياني للمعادلة $x = -2$ هو مستقيم رأسي يقطع المحور x في النقطة $(-2, 0)$.

أنتحق من فهمي: (4-6) أنظر الهامش. ✓

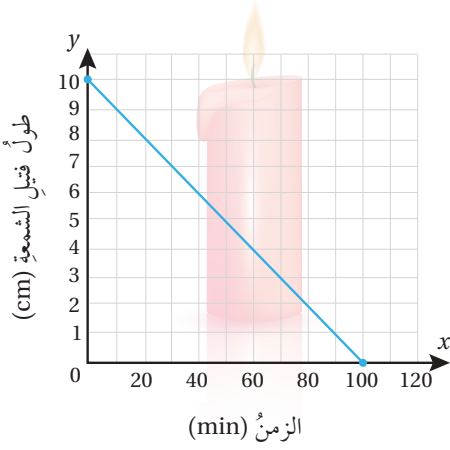
4 $4x - y = 1$

5 $y = -7$

6 $x = 5$

الوحدة 3

مثال 4: من الحياة



شمعة: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين طول فتيل شمعة بالسنتيمترات والزمن بالدقائق منذ بدء إشعاله.

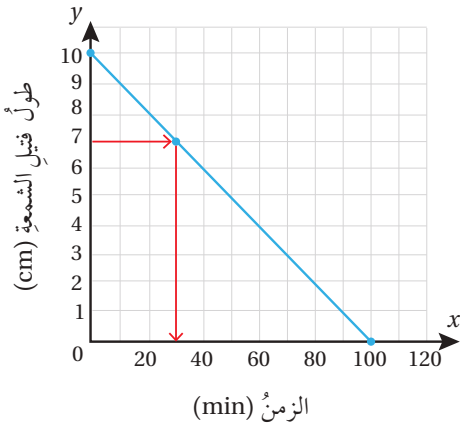
1 أجد المقطع x والمقطع y للعلاقة.

المقطع x هو 100 قيمة $x = 100$ عندما قيمة $y = 0$

المقطع y هو 10 قيمة $y = 10$ عندما قيمة $x = 0$

2 أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

المقطع y يساوي 10 ويعني أن طول فتيل الشمعة 10 cm عند إشعاله، المقطع x يساوي 100، وهذا يعني أن فتيل الشمعة احترق احتراقاً كاملاً بعد 100 دقيقة، ولم يبق منه شيء.



3 بعد كم دقيقة يكون طول فتيل الشمعة 7 cm؟

أحدّد 7 cm على المحور y ، ثم أحدّد النقطة التي تقابلها على المستقيم، وأحدّد الإحداثي x للنقطة وهو 30.

إذن، يكون طول فتيل الشمعة 7 cm بعد 30 دقيقة من إشعاله.

أتحقّق من فهمي:



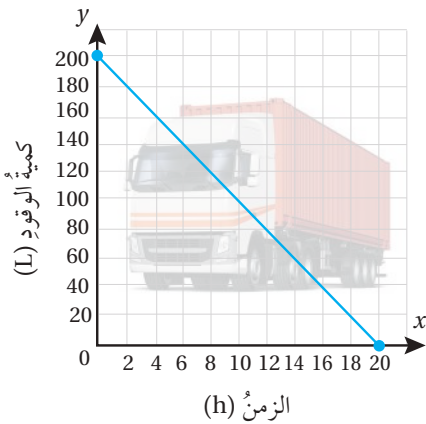
وقود: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين عدد لترات الوقود المتبقية في خزان شاحنة وعدد ساعات قيادتها.

(4-6) أنظر ملحق الإجابات.

4 أجد المقطع x والمقطع y للعلاقة.

5 أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

6 بعد كم ساعة قيادة يبقى في خزان الشاحنة 100 L من الوقود؟



أحدّد ما إذا كانت كل معادلة ممّا يأتي خطيّة أم لا، وإذا كانت كذلك أكتبها على الصورة القياسية:

1 $2x = 7y$

خطية، $2x - 7y = 0$

2 $y = 1 - x^2$

ليست خطية

3 $9xy + 11x = 6$

ليست خطية

أمثّل كل معادلة ممّا يأتي بيانياً بإنشاء جدول قيم: (4-6) أنظر ملحق الإجابات.

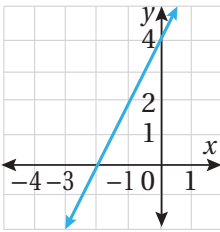
4 $y = -1$

5 $y - x = 8$

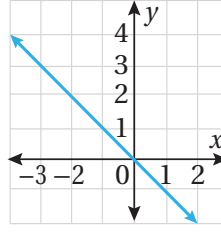
6 $3x + 2y = 15$

أجد المقطع x والمقطع y لكل معادلة ممّا يأتي:

7



8



المقطع x يساوي 0 المقطع y يساوي 0 المقطع x يساوي -2، والمقطع y يساوي 4

أمثّل كل معادلة ممّا يأتي بيانياً باستعمال المقطع x والمقطع y :

(9-11) أنظر ملحق الإجابات.

9 $x = 4y - 6$

10 $x + 6 = 0$

11 $\frac{4x}{3} = \frac{3y}{4} + 1$



رحلة: ملأ رامي خزان سيارته بالوقود استعداداً للرحلة إلى مدينة العقبة. والمعادلة $y = 18 - 2x$ تعطي كمية الوقود بالترات المتبقية في خزان السيارة بعد قيادتها x ساعة.

أجد المقطع x والمقطع y للمعادلة المُعطاة، ثم أستعمل

المقطعين لتمثيل المعادلة بيانياً. المقطع x يساوي 9، والمقطع y يساوي 18. أنظر رسم

الطلبة، المستقيم يمر بالنقطتين (0, 18)، (9, 0).

أصف مدلول كل من المقطعين في هذه الحالة.

بعد كم ساعة من قيادة السيارة يتبقى $\frac{1}{4}$ الوقود في الخزان؟

بعد 6.75 ساعة، أي بعد 6 ساعات و 45 دقيقة.

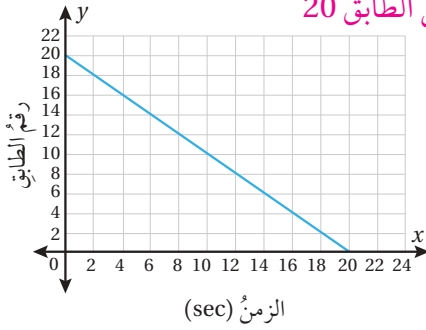
12 (13) المقطع x يساوي 9 وهذا يعني إمكانية قيادة السيارة 9 ساعات حتى ينفذ الوقود.

13 المقطع y يساوي 18 وهذا يعني وجود 18 لتر وقود في خزان سيارة رامي قبل البدء بالرحلة.

14

الوحدة 3

بناية: يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين رقم الطابق في أحد الأبراج التجارية والزمن الذي يقضيه الراكب بالثواني في المصعد حتى يصل إلى هذا الطابق. فإذا علمت أن رقم الطابق الأرضي 0، فأجب عن كل مما يأتي:



15 من أي طابق صعد الراكب إلى المصعد؟ من الطابق 20

16 بعد كم ثانية وصل الراكب إلى الطابق

الأرضي؟ 20 s

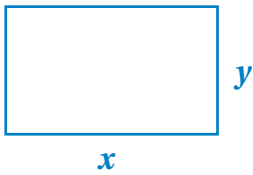
17 بعد كم ثانية وصل الراكب إلى الطابق

الثامن؟ 12 s

أتذكر

الأعداد الكليّة:

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...



18 **هندسة:** محيط المستطيل في الشكل المجاور 12 cm

أكتب معادلة بالصورة القياسية تمثل محيط المستطيل. $x + y = 6$

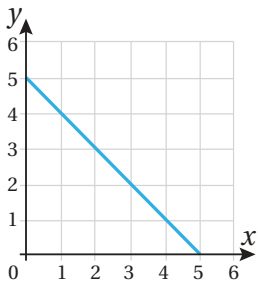
19 أجد المقطع x والمقطع y للتمثيل البياني لمعادلة محيط

المستطيل. المقطع x يساوي 6، والمقطع y يساوي 6

20 أمثل المعادلة بيانياً. أنظر ملحق الإجابات.

21 أجد ثلاثة أزواج مرتبة تمثل أبعاد المستطيل، على أن تكون قيم x و y أعداداً كليّة.

إجابة ممكنة: (1, 5), (2, 4), (3, 3).



22 **تحذّر:** يبين التمثيل البياني المجاور المستقيم $x + y = 5$.

أرسم مستقيماً على الصورة $x = a$ ، ومستقيماً

على الصورة $y = b$ ، على أن تكون المساحة بين

المستقيمات الثلاثة 4.5 وحدات مربعة.

أنظر ملحق الإجابات.

23 **تبرير:** أمثل المعادلات $x = 5$, $x = 2$, $y = -2$, $y = 1$ في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أحدد الشكل الهندسي المغلق الناتج عن المستقيمات. أبرر إجابتي.

24 **أكتب** كيف أكتب معادلة خطية بالصورة القياسية؟

أنظر إجابات الطلبة.

مهارات التفكير العليا

23 مربع طول ضلعه 3 وحدات.

المسافة بين $x = 2$ و $x = 5$ يساوي

3، المسافة بين $y = 1$ و $y = -2$ يساوي

3

أستكشفُ



تُستعملُ إشاراتنا المروريّة المجاورتان لتنبه السائقين على مقدار انحدار الطريق، وذلك بإيجاد نسبة الارتفاع أو الهبوط إلى كل 100 m أفقيًا. فما الفرق بين الإشارتين؟
نسبة انحدار الطريق 10% أكبر من نسبة انحدار الطريق 8%، مما يعني أن الطريق في الحالة الأولى أشد انحدارًا.

فكرة الدرس

أجد ميل المستقيم.

المصطلحات

ميل المستقيم، التغير الرأسي، التغير الأفقي، معدل التغير.

ميل المستقيم (slope of a line) هو مصطلح يُستعمل لوصف مقدار انحدار المستقيم. فالميل هو نسبة التغير الرأسي (rise) إلى التغير الأفقي (run).

$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \text{الميل}$$

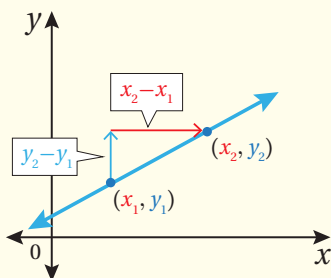
ولإيجاد ميل المستقيم غير الرأسي في المستوى الإحداثي يمكننا إيجاد نسبة التغير في الإحداثي y (التغير الرأسي) إلى التغير في الإحداثي x (التغير الأفقي) بين أي نقطتين على المستقيم.

ميل المستقيم

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** ميل المستقيم غير الرأسي هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

• **بالرموز:** يمكن إيجاد الميل (m) للمستقيم غير الرأسي المارّ بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحو الآتي:



$$m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

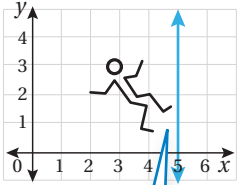
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

التغير في y ← $y_2 - y_1$
التغير في x ← $x_2 - x_1$

الوحدة 3

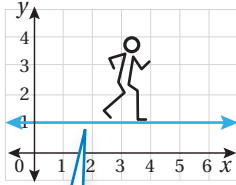
يمكن أن يكون ميل المستقيم سالبًا أو موجبًا أو صفرًا أو غير مُعرَّفٍ كما يظهر في التمثيلات البيانية أدناه. للمقارنة بين ميل المستقيمات المختلفة أتخيل نفسي أسير على كل منحني من اليسار إلى اليمين:

الميل غير مُعرَّفٍ



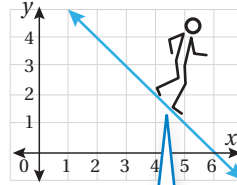
مستقيم عمودي

الميل صفر



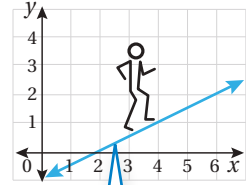
مستقيم أفقي

الميل سالب



ينحدرُ المستقيمُ إلى الأسفل عند التحرك من اليسار إلى اليمين

الميل موجب

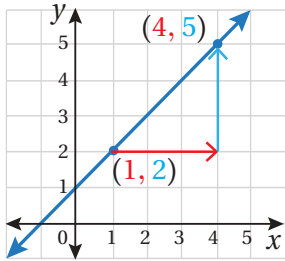


يرتفعُ المستقيمُ إلى الأعلى عند التحرك من اليسار إلى اليمين

مثال 1

أجد ميل المستقيم المارّ بكلّ نقطتين مما يأتي:

1 (1, 2), (4, 5)



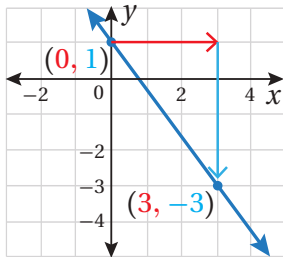
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 2) وعن (x_2, y_2) بـ (4, 5) أبسط

إذن، ميل المستقيم هو 1

2 (0, 1), (3, -3)



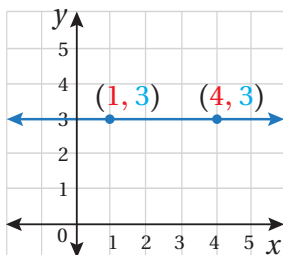
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 1}{3 - 0} = -\frac{4}{3}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (0, 1) وعن (x_2, y_2) بـ (3, -3) أبسط

إذن، ميل المستقيم هو $-\frac{4}{3}$

3 (1, 3), (4, 3)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{3 - 3}{4 - 1}$$
$$= \frac{0}{3} = 0$$

صيغة الميل

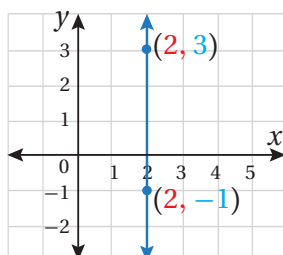
أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 3)

وعن (x_2, y_2) بـ (4, 3)

أبسّط

إذن، ميل المستقيم هو 0

4 (2, 3), (2, -1)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{-1 - 3}{2 - 2}$$
$$= \frac{-4}{0}$$

صيغة الميل

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (2, 3)

وعن (x_2, y_2) بـ (2, -1)

أبسّط

إذن، ميل هذا المستقيم غير مُعرّف.

أتحقّق من فهمي: ✓

5 (-1, 2), (3, 5) $\frac{3}{4}$

6 (-1, -2), (-4, 1) -1

7 (1, 2), (-3, 2) 0

8 (1, 5), (1, -4) غير معرف

إذا عَلِمَ ميل المستقيم وإحداثيًا نقطة عليه، فيمكن إيجاد الإحداثي المجهول لأي نقطة أخرى على المستقيم.

1 أجد قيمة s التي تجعل ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(-2, 1)$ و $(3, s)$ يساوي $\frac{3}{5}$

أفترض أن النقطة $(-2, 1)$ هي (x_1, y_1) ، والنقطة $(3, s)$ هي (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{s - 1}{3 - (-2)} \quad x_1 = -2, x_2 = 3, y_1 = 1, y_2 = s \text{ أُعوض}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{s - 1}{5} \quad \text{أبسّط}$$

$$5(s - 1) = 3 \times 5 \quad \text{خاصية ضرب التبادلي}$$

$$5s - 5 = 15 \quad \text{خاصية التوزيع}$$

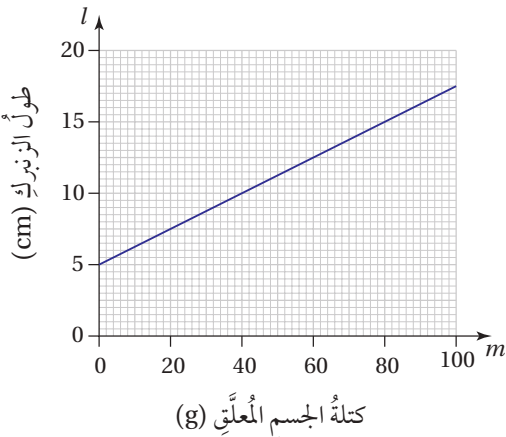
$$5s = 20 \quad \text{أجمع 5 لكلا الطرفين}$$

$$s = 4 \quad \text{أقسم طرفي المعادلة على 5}$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

2 أجد قيمة k التي تجعل ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(3, 1)$ و $(k, 2)$ يساوي $-\frac{1}{6}$ $k = -3$

معدل التغير (rate of change) هو نسبة تصف مقدار تغير كمية بالنسبة إلى تغير كمية أخرى، ويمكننا استعمال ميل المستقيم الذي يمثل العلاقة بين هاتين الكميتين لتفسير معنى معدل التغير في المسائل الحياتية.



مثال 3: من الحياة

يبين التمثيل البياني المجاور طول زنبرك l بالسنتيمترات، عند تعليق جسم كتلته m غرام به.

1 أجد طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به.

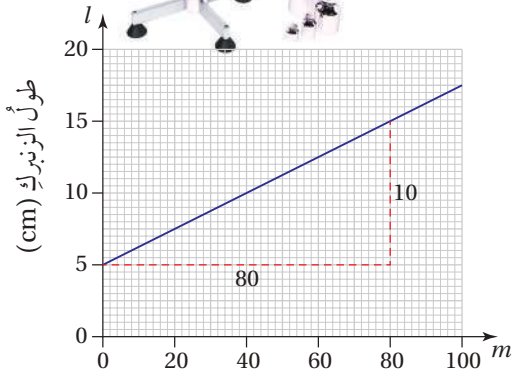
طول الزنبرك قبل تعليق أي كتلة به 5 cm ، وهي القيمة التي تقابل الكتلة 0 g في التمثيل.

2

أجدُ معدَّلَ تغيُّرِ طولِ الزنبركِ بالنسبةِ إلى كتلتِهِ، ثمَّ أبينُ ماذا يمثِّلُ.

لإيجادِ معدَّلِ التغيُّرِ أجدُ ميلَ المستقيمِ الذي يمثِّلُ العَلاقةَ بينَ الكتلةِ وطولِ الزنبركِ.

أستعملُ النقطتينِ (0, 5) و (80, 15) لإيجادِ ميلِ المستقيمِ.



كتلةُ الجسمِ المُعلَّقِ (g)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغةُ الميلِ

أعوِّضُ عن (x₁, y₁) بـ (0, 5)

$$= \frac{15 - 5}{80 - 0}$$

وعن (x₂, y₂) بـ (80, 15)

$$= \frac{10}{80} = \frac{1}{8}$$

أبسِّطُ

إذن، ميلُ المستقيمِ هو $\frac{1}{8}$ ، وهو يمثِّلُ معدَّلَ التغيُّرِ في طولِ الزنبركِ لكلِّ غرامٍ من الكتلةِ، حيثُ إنَّ طولَ الزنبركِ يزدادُ بمقدارِ $\frac{1}{8}$ cm لكلِّ غرامٍ يُضافُ إليه.

أتحقق من فهمي:



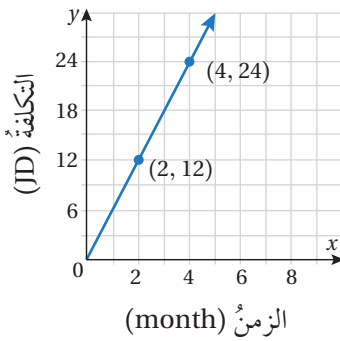
يبينُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ متوسطَ تكلفةِ تشغيلِ ثلاجةٍ (بالدينارِ) أشهرًا عدَّةً.

3

أجدُ تكلفةَ تشغيلِ الثلاجةِ مدَّةَ 3 أشهرٍ. JD 18

4

أجدُ معدَّلَ تغيُّرِ تكلفةِ تشغيلِ الثلاجةِ بالنسبةِ إلى الزمنِ، ثمَّ أوضِّحُ ماذا يمثِّلُ.



معدَّلُ التغيُّرِ 6، و يمثِّلُ معدَّلَ تكلفةِ التشغيلِ بالنسبةِ للزمنِ

حيثُ تزدادُ التكلفةُ بمقدارِ 6 JD لكلِّ شهرٍ إضافيٍّ من التشغيلِ.

أتحربُ
وأحلُّ المسائلِ



أتذكَّرُ

أراعي الترتيبَ عندَ تعويضِ إحداثياتِ الزوجينِ المُرتبَّينِ في

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أجدُ ميلَ المستقيمِ المارِّ بكلِّ نقطتينِ ممَّا يأتي:

1 (3, 3), (5, 7) 2

2 (6, 1), (4, 3) -1

3 (-2, -6), (-2, 6) غير معرَّف

4 (5, -7), (0, -7) 0

5 (-1, 0), (0, -5) -5

6 (4, 1), (12, 8) $\frac{7}{8}$

الوحدة 3

أجد قيمة s التي تجعل ميل المستقيم (m) المار بكل نقطتين مما يأتي على نحو ما هو مُعطى:

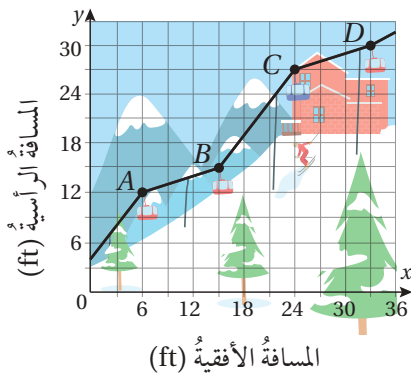
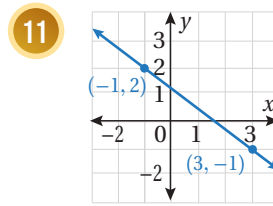
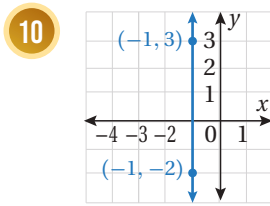
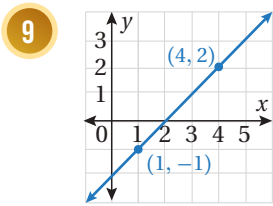
7 $(6, -2), (s, -6), m = 4$ 8 $(9, s), (6, 3), m = -\frac{1}{3}$ 2

أحدّد ما إذا كان ميل كل مستقيم مما يأتي سالباً أم موجباً أم صفراً أم غير معرف، ثمّ

أجده: **سالب، $-\frac{3}{4}$**

غير معرف

موجب، 1



تزلج: يبيّن التمثيل البياني المجاور المنظر الجانبي لمصعد تزلج.

أجد ميل كل من: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD}

أي جزء من مصعد التزلج يُعدّ الأشدّ انحداراً؟ أبرّر إجابتي.

\overline{BC} ، لأن ميله أكبر من ميل باقي الأجزاء.

أتعلم

كلما زادت القيمة المطلقة للميل، كان المستقيم أشدّ انحداراً.

12

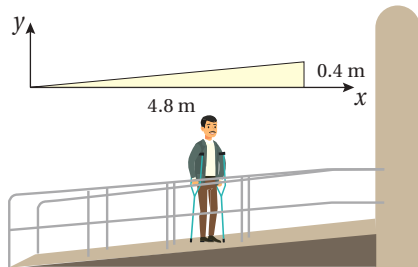
13

12) $\overline{CD}: m = \frac{1}{3}$,

$\overline{BC}: m = \frac{4}{3}$, $\overline{AB}: m = \frac{1}{3}$

14

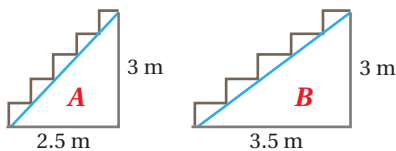
15



منحدرات: تنصّ قوانين البناء المتعلقة

بمنحدرات وصول الأشخاص ذوي الإعاقة الحركية إلى الأبنية على أن كلّ ارتفاع رأسيّ بمقدار 0.4 m يتطلّب مساراً أفقيّاً طوله 4.8 m. أجد ميل هذا المنحدر.

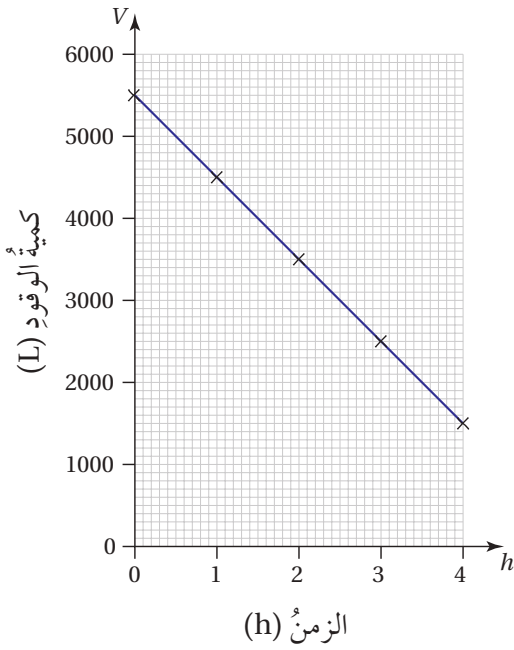
$\frac{1}{12}$



درج: يبيّن الشكل المجاور درجين مُصمّمين للدخول إلى أحد المباني. فأأي الدرجين اختار صعوده للدخول إلى

المبنى؟ أبرّر إجابتي. **إجابة محتملة: B، لأنه أقل انحداراً**

(ميل A هو $1.2 = \frac{3}{2.5}$ < ميل B هو $0.86 \approx \frac{3}{3.5}$) إذا رغبت ببذل جهد أقل في الصعود.



طائرة: يبيّن التمثيل البيانيّ المجاور كمية الوقود V بالترات في خزان طائرة بعد h ساعة.

16 ما كمية الوقود في خزان الطائرة عند انطلاقها؟ $5500 L$

17 ما كمية الوقود في الخزان بعد مرور $3.5 h$ ؟ $2000 L$

18 أجد معدل تغير كمية الوقود في الخزان بالنسبة إلى الزمن، ثمّ أبين ماذا يمثل.

معدل التغير -1000 ، وهذا يعني استهلاك $1000 L$ من الوقود لكل ساعة طيران.

مهارات التفكير العليا

19 **أكتشف الخطأ:** أوجد مهند ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(0, 2)$ ، $(5, 4)$ ، وكان حله

على النحو الآتي:

لم يراعي الترتيب عند تعويض الزوجين المرتبين في صيغة الميل.

$$m = \frac{2-4}{5-0} = -\frac{2}{5} \quad \times$$

الصحيح:

$$m = \frac{2-4}{0-5} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

أبين الخطأ الذي وقع فيه مهند وأصحّحه.

إرشاد

أوظف الميل في تبرير إجابتني.

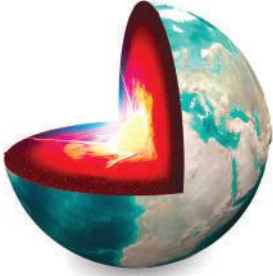
20 **تبرير:** هل تقع النقاط $A(1, 3)$ ، $B(4, 2)$ ، $C(-2, 4)$ على المستقيم نفسه؟ أبرر

إجابتي. نعم؛ لأن ميل $AB = \text{ميل } AC = \text{ميل } BC = -\frac{1}{3}$

21 **مسألة مفتوحة:** أجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله -9 - إجابة ممكنة: $(0, 30)$ ، $(1, 21)$.

22 **أكتب:** كيف أجد ميل مستقيم مارّ بنقطتين؟ أنظر إجابات الطلبة.

أستكشف



يبلغ متوسط درجة الحرارة على سطح الأرض 20°C تقريباً. وترتفع درجة الحرارة تحت سطح القشرة الأرضية بمعدل 25°C لكل كيلومتر من العمق. أكتب معادلةً بمتغيرين تمثل درجة الحرارة لكل كيلومتر تحت سطح الأرض.

فكرة الدرس

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع، وأمثلها بيانياً.

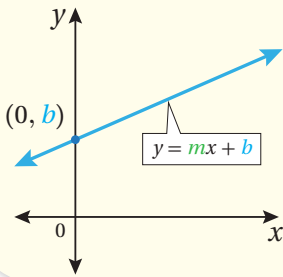
المصطلحات

صيغة الميل والمقطع

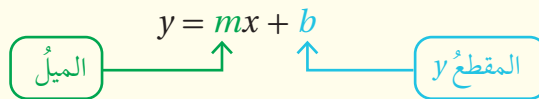
تعلمت سابقاً كيفية إيجاد الميل والمقطعين الإحداثيين للمستقيم. ويمكنني استعمال الميل والمقطع y لكتابة معادلة أي مستقيم بصيغة الميل والمقطع (slope-intercept form).

صيغة الميل والمقطع

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** صيغة الميل والمقطع للمعادلة الخطية هي: $y = mx + b$ ، حيث m ميل المستقيم، و b المقطع y له.



• **بالرموز:**

مثال 1

1 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{4}{5}$ والمقطع y له -7 بصيغة الميل والمقطع.

أعوّض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{4}{5}x + (-7)$$

$$y = \frac{4}{5}x - 7$$

صيغة الميل والمقطع

$$m = \frac{4}{5}, b = -7$$

أبسط

$$y = \frac{4}{5}x - 7$$

إذن، معادلة المستقيم

2 أجدُ معادلةَ المستقيم المارَّ بالنقطة (1, 5) وميله 2 بصيغة الميل والمقطع.

1 الخُطوةُ أستعمل الميل وإحداثيَّي النقطة لإيجاد قيمة b .

$$\begin{aligned}
 y &= mx + b && \text{صيغةُ الميل والمقطع} \\
 5 &= 2(1) + b && \text{أعوِّضُ } m = 2, y = 5, x = 1 \\
 5 &= 2 + b && \text{أبسِّطُ} \\
 5 - 2 &= 2 + b - 2 && \text{أطرحُ 2 من كلا الطرفين} \\
 3 &= b && \text{أبسِّطُ}
 \end{aligned}$$

2 الخُطوةُ أعوِّضُ الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

$$\begin{aligned}
 y &= mx + b && \text{صيغةُ الميل والمقطع} \\
 y &= 2x + 3 && \text{أعوِّضُ } m = 2, b = 3
 \end{aligned}$$

إذن، معادلةُ المستقيم $y = 2x + 3$

3 أكتبُ معادلةَ المستقيم المارَّ بالنقطتين (2, 1) و (5, -8) بصيغة الميل والمقطع.

1 الخُطوةُ أستعمل النقطتين في إيجاد الميل.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \text{صيغةُ الميل} \\
 &= \frac{-8 - 1}{5 - 2} && \text{أعوِّضُ عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (2, 1) \\
 &= \frac{-9}{3} = -3 && \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (5, -8) \\
 &&& \text{أبسِّطُ}
 \end{aligned}$$

إذن، الميل -3

2 الخُطوةُ أستعمل الميل وإحداثيَّي إحدى النقطتين لإيجاد قيمة b

$$\begin{aligned}
 y &= mx + b && \text{صيغةُ الميل والمقطع} \\
 1 &= -3(2) + b && \text{أعوِّضُ } m = -3, y = 1, x = 2 \\
 1 &= -6 + b && \text{أبسِّطُ} \\
 1 + 6 &= -6 + b + 6 && \text{أجمعُ 6 إلى الطرفين} \\
 7 &= b && \text{أبسِّطُ}
 \end{aligned}$$

إذن، فالمقطع y هو 7

الوحدة 3

الخطوة 3 أعوض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

$$y = mx + b$$

صيغة الميل والمقطع

$$y = -3x + 7$$

$$m = -3, b = 7 \text{ أعوض}$$

$$y = -3x + 7 \text{ إذن، معادلة المستقيم}$$

أتحقق من فهمي:

4 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 5 والمقطع y له -2 بصيغة الميل والمقطع. $y = 5x - 2$

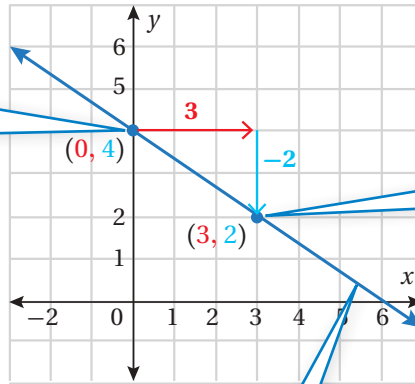
5 أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(-1, 0)$ وميله $\frac{1}{3}$ بصيغة الميل والمقطع. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

6 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(0, -4)$ و $(-2, 6)$ بصيغة الميل والمقطع. $y = -5x - 4$

يمكن استعمال الميل والمقطع y من المعادلة الخطية المكتوبة بصيغة الميل والمقطع لتمثيل المستقيم.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $y = -\frac{2}{3}x + 4$ بيانياً باستعمال الميل والمقطع y .



1 المقطع y هو 4، إذن أعيّن النقطة $(0, 4)$ في المستوى الإحداثي.

2 أستعمل الميل $-\frac{2}{3}$ لتعيين نقطة أخرى في المستوى. أبدأ من النقطة $(0, 4)$ ، وأتحرك 3 وحدات لليمين، ثم وحدتين للأسفل.

3 أرسم مستقيماً يمرّ بالنقطتين.

✓ **أتتحقق من فهمي:** (2-4) أنظر ملحق الإجابات.

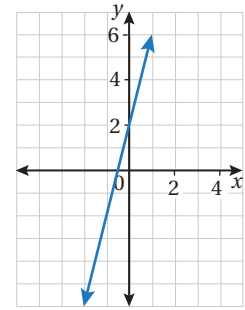
2 $y = 2x + 1$

3 $y = x - 4$

4 $y = 3 - x$

تعلمت سابقاً كيفية تمثيل معادلة خطية مكتوبة بصيغة الميل والمقطع، وبالعكس يُمكنني كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع عرّف تمثيلها البياني.

مثال 3



1 أكتب معادلة المستقيم المُمثلة بيانياً في الشكل المجاور بصيغة الميل والمقطع:

2 **الخطوة** أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم ولتكونا النقطتين $(1, 6)$, $(-1, -2)$ ، وأجد مقدار

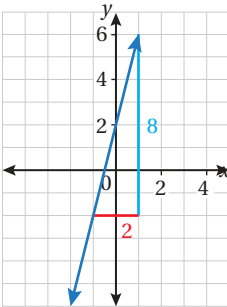
التغير الرأسي والتغير الأفقي بينهما.

عدد الخطوات الأفقية: 2

عدد الخطوات الرأسية: 8

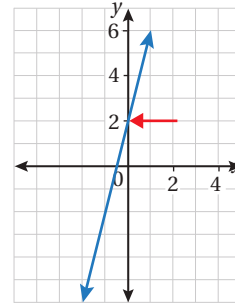
$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \text{الميل}$$

$$m = \frac{8}{2} = 4$$



1 **الخطوة** أجد المقطع y .

ألاحظ أن المستقيم قطع المحور y عند 2، إذن، فالمقطع y هو 2



3 **الخطوة** أكتب معادلة

أعوّض الميل والمقطع y في صيغة الميل والمقطع.

صيغة الميل والمقطع

$$m = 4, b = 2 \text{ أعوّض}$$

إذن، معادلة المستقيم $y = 4x + 2$

$$y = mx + b$$

$$y = 4x + 2$$

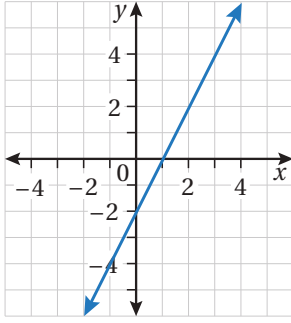
الوحدة 3

أتحقق من فهمي:



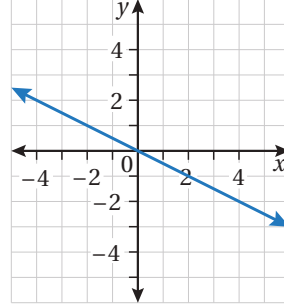
أكتب معادلة المستقيم الممثل بيانياً في كل شكل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع:

2



$$y = 2x - 2$$

3



$$y = -\frac{1}{2}x$$

غالباً ما يمثل المقطع y القيمة الابتدائية في المسائل الحياتية التي يتم نمذجتها بمعادلة خطية، ويمثل الميل معدل التغير الثابت.

مثال 4: من الحياة



بطارية: إذا كانت النسبة المئوية لطاقة بطارية جهاز حاسوبٍ محمولٍ مشحونةً شحناً تاماً (بالصيغة العشرية) 1.00، وبعد تشغيل الجهاز تبدأ طاقة البطارية بالتناقص بنسبة 0.2 كل ساعة.

أهمل

لماذا عبّر عن نسبة التناقص في طاقة البطارية بـ 0.2- في المعادلة؟

1 أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد نسبة الطاقة المتبقية في البطارية بعد مرور ساعاتٍ عدّة على تشغيل جهاز الحاسوب. أفرض أن x هي عدد ساعات تشغيل الحاسوب، و y هي نسبة الطاقة المتبقية في البطارية.

نسبة الطاقة المتبقية



y

نسبة التناقص في الطاقة



- 0.2

عدد ساعات التشغيل



x

نسبة الطاقة عند بداية التشغيل



1

$$y = -0.2 \times x + 1$$

2 أصف ما يمثله المقطع y والميل في المسألة.

المقطع y يساوي 1، وهو يمثل نسبة الطاقة بداية التشغيل بالصيغة العشرية، وتعني أن البطارية مشحونة بنسبة 100%، أما الميل فيمثل نسبة التناقص في طاقة البطارية كل ساعة (وهي نسبة ثابتة).

3 أجد المقطع x للمعادلة، ثم أصف ما يمثله في المسألة.

لإيجاد المقطع x ، أعوض $y = 0$ ، ثم أحل المعادلة لأجد قيمة x .

$$y = -0.2x + 1$$

المعادلة الأصلية

$$0 = -0.2x + 1$$

أعوض $y = 0$

$$0 - 1 = -0.2x + 1 - 1$$

أطرح 1 من كلا الطرفين

$$\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-1}{-0.2}$$

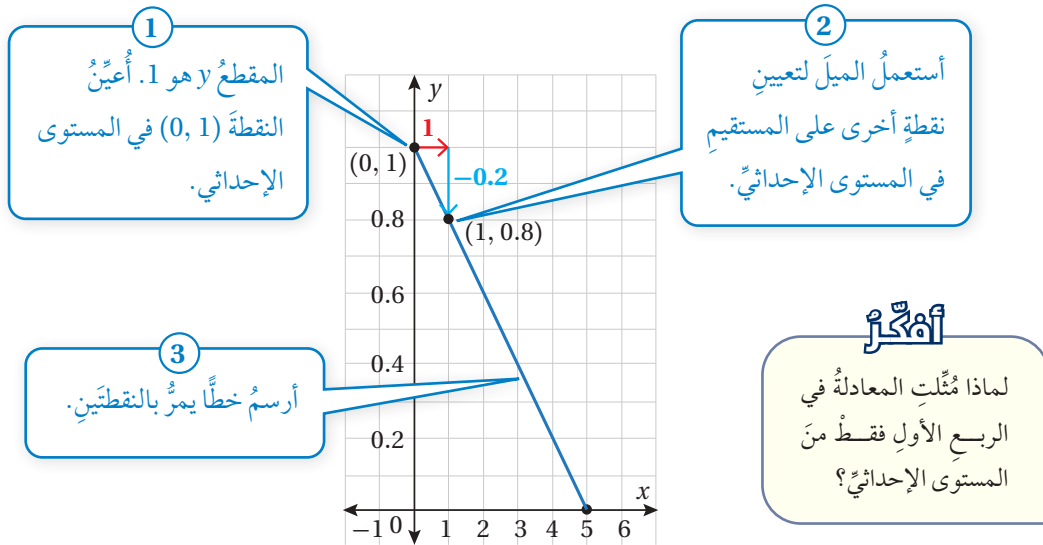
أقسم طرفي المعادلة على -0.2

$$x = 5$$

أبسط

إذن، فالمقطع x هو 5، وهو يدل على أن البطارية ستفقد شحنتها كلياً بعد 5 ساعات من تشغيل جهاز الحاسوب.

4 أمثل المعادلة بيانياً باستعمال الميل والمقطع y .



الوحدة 3

5 بعد كم ساعة تكون نسبة الطاقة في البطارية 0.75؟

المعادلة الأصلية

$$y = -0.2x + 1$$

$$y = 0.75$$

$$0.75 = -0.2x + 1$$

$$0.75 - 1 = -0.2x + 1 - 1$$

$$\frac{-0.2x}{-0.2} = \frac{-0.25}{-0.2}$$

$$x = 1.25$$

أطرح 1 من كلا الطرفين

أقسم طرفي المعادلة على -0.2

أبسط

إذن، ستكون نسبة الطاقة في البطارية 0.75 بعد ساعة وربع.

أتحقق من فهمي:



اشتراك هاتف: تدفع فُرْح اشتراكًا شهريًا لهاتفها قيمته 5 دنانير، وتدفع قرشين عن كل دقيقة تتحدث فيها بالهاتف. (1-4) أنظر ملحق الإجابات.

1 أكتب معادلة خطية بمتغيرين لإيجاد تكلفة ما تدفعه فُرْح عند تحديثها عددًا من الدقائق خلال الشهر.

2 أصف ما يمثله المقطع y والميل في المسألة.

3 أجد المقطع x للمعادلة، ثم أصف ما يمثله في المسألة.

4 أمثل المعادلة بيانيًا باستعمال الميل والمقطع y .

أندرب وأحل المسائل



1 أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 1 والمقطع y له -1 بصيغة الميل والمقطع. $y = x - 1$

2 أجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة الأصل وميله 4 بصيغة الميل والمقطع.

$$y = 4x + 0 \Rightarrow y = 4x$$

3 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين (4, -2) و (-1, 3) بصيغة الميل والمقطع.

$$y = -x + 2$$

4 أكتب معادلة المستقيم الأفقي الذي يقطع المحور y في النقطة (0, -5) بصيغة

$$\text{الميل والمقطع. } y = 0x - 5 \Rightarrow y = -5$$

أفكر

هل يمكن كتابة معادلة المستقيم الرأسي بصيغة الميل والمقطع؟

أمثل كل معادلة مما يأتي بيانياً باستعمال الميل والمقطع y : (5-10) أنظر ملحق الإجابات.

5 $y = 3x + 4$

6 $y = 2x - 5$

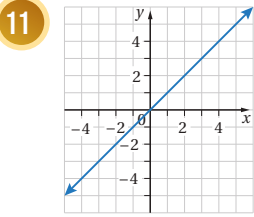
7 $y = \frac{x}{2} - 3$

8 $y = 3x + 5$

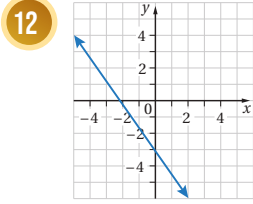
9 $y = \frac{x}{3} + 4$

10 $y = 4 - x$

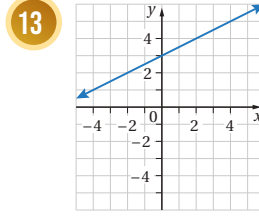
أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع:



$y = x$

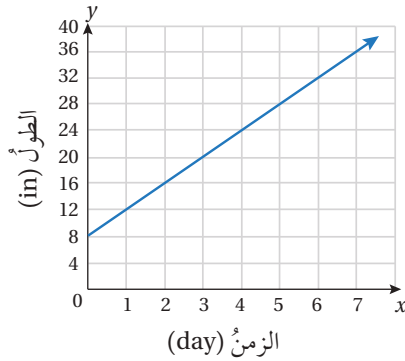


$y = -\frac{3}{2}x - 3$



$y = \frac{1}{2}x + 3$

أشجار: يبين التمثيل البياني أدناه العلاقة بين طول نبتة موز بالإنش والزمن بالأيام منذ زراعتها.



14 كم كان طول الشجرة عند زراعتها؟ 8 in

15 أكتب معادلة خطية بمتغيرين تمثل مقدار نمو شجرة الموز بعد مرور أيام عدّة.

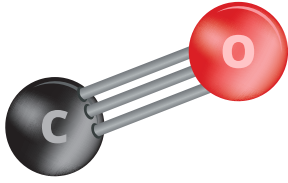
$y = 4x + 8$

معلومة

شجرة الموز هي في الحقيقة ليست شجرة، بل هي عشبة عملاقة تقف مثل الأشجار وتُشابه النخيل الاستوائي، وتعد أطول عشبة على وجه الأرض.



الوحدة 3



بيئة: تتناقص انبعاثات أول أكسيد الكربون في جميع أنحاء العالم بنحو 2.6 مليون طن متري كل عام. ففي عام 1991 بلغت انبعاثات أول أكسيد الكربون 79 مليون طن متري. أكتب معادلة خطية بمتغيرين تمثل العلاقة بين انبعاثات أول أكسيد الكربون والزمن. (إرشاد: افترض أن $x = 91$ تدل على العام 1991).

$$y = -2.6x + 315.6$$

16

معلومة

أحد مصادر الحرارة الجوفية للكرة الأرضية هو تقلص الكرة الأرضية تحت فعل الجاذبية عند نشأتها من الغبار الكوني.

علوم الأرض: أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

17

افترض أن x تمثل عمق الأرض بالكيلومتر و y تمثل درجة الحرارة: $y = 25x + 20$

مهارات التفكير العليا

أكتشف المختلف: أي المعادلات الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتي.
المعادلة الوحيدة المكتوبة بصيغة الميل والمقطع.

18

$$2x + 3y = 12$$

$$y = 4 - \frac{2}{3}x$$

$$6y = -4x + 24$$

$$3x - 2y = 12$$

$$x = 6 - 1.5y$$

تحل: أجد قيمة a في المعادلة $2y + ax = -5$ ، علماً أن ميل المعادلة $\frac{5}{2}$

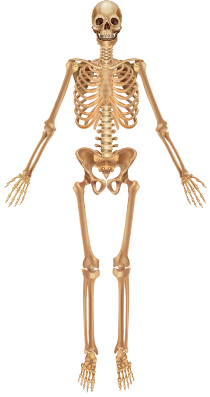
19

$$a = -5$$

أكتب: كيف أكتب معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع علم ميله والمقطع y له.

20

أنظر إجابات الطلبة.



أستكشفُ

تمثل المعادلة $y - 60.81 = 5.74(x - 5)$ العلاقة بين طول الأنتى y سنتيمتر، وطول ساعدها x سنتيمتر.

1 أجد ميل المستقيم الذي يمثل المعادلة. 5.74

2 اكتشف علماء الآثار هيكلًا عظميًا غير كاملٍ لأنتى بساعده

طوله 23 cm. أجد طول الهيكل العظمي. 164.13 cm



فكرة الدرس

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة وأمثلها بيانيًا.

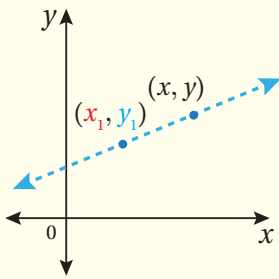
المصطلحات

صيغة الميل ونقطة.

تعلمت في الدرس السابق كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع y ، وسأتعلم في هذا الدرس كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة (point - slope form) إذا علمت ميل المستقيم وإحداثيات نقطة يمرُّ بها.

صيغة الميل ونقطة

مفهوم أساسي



• بالكلمات: صيغة الميل ونقطة للمعادلة الخطية هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث m ميل المستقيم، و (x_1, y_1) نقطة مُعطاة.

• بالرموز:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

نقطة مُعطاة

الميل

مثال 1

1 أكتب معادلة المستقيم المارَّ بالنقطة $(-3, 6)$ وميله -5 بصيغة الميل ونقطة.

أعوِّض الميل والنقطة المُعطاة في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - 6 = -5(x - (-3))$$

$$m = -5, (x_1, y_1) = (-3, 6)$$

أبسِّط

$$y - 6 = -5(x + 3)$$

إذن، معادلة المستقيم $y - 6 = -5(x + 3)$

الوحدة 3

2 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(-3, 5)$ و $(9, 21)$ بصيغة الميل ونقطة.

1 الخطوة أستعمل النقطتين في إيجاد الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{21 - 5}{9 - (-3)} \quad \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (-3, 5)$$

$$= \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (9, 21)$$

$$\quad \quad \quad \text{أبسط}$$

إذن، الميل $\frac{4}{3}$

2 الخطوة أعوّض الميل وإحداثيات إحدى النقطتين في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9) \quad \text{أعوّض } m = \frac{4}{3}, (x_1, y_1) = (9, 21)$$

إذن، معادلة المستقيم $y - 21 = \frac{4}{3}(x - 9)$

أتحقق من فهمي: ✓

3 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(8, -4)$ و ميله $\frac{2}{3}$ بصيغة الميل ونقطة. $y + 4 = \frac{2}{3}(x - 8)$

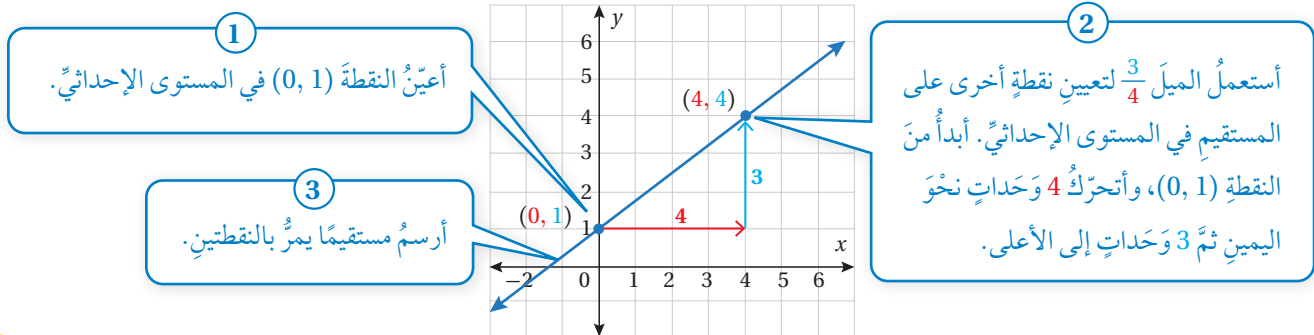
4 أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(7, 2)$ و $(1, -8)$ بصيغة الميل ونقطة. $m = \frac{5}{3}, y + 8 = \frac{5}{3}(x - 1)$

يمكن استعمال الميل والنقطة المُعطاة من المعادلة الخطية المكتوبة بصيغة الميل ونقطة لتمثيل المستقيم.

مثال 2

1 أمثل المعادلة $y - 1 = \frac{3}{4}x$ بيانياً باستعمال الميل ونقطة.

يمكن إعادة كتابة المعادلة على الصورة: $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 0)$ ، وعليه فإن الميل $\frac{3}{4}$ والنقطة $(0, 1)$.



✓ **أتحقّق من فهمي:** (2-4) أنظر الهامش.

أمثّل كلّ معادلةٍ ممّا يأتي بيانياً باستعمال الميل ونقطة:

2 $y - 4 = 2(x - 3)$

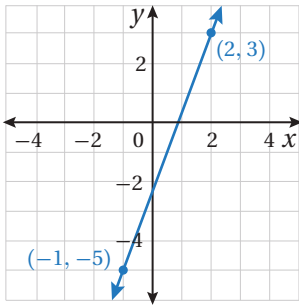
3 $y - 5 = -3(x + 1)$

4 $y + 7 = -\frac{4}{5}(x - 4)$

تعلّمت في المثال السابق كيفية التمثيل البياني لمعادلة خطية مكتوبة بصورة الميل ونقطة، وبالعكس يمكن كتابة معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة إذا عُرِفَ تمثيلها البياني.

مثال 3

1 أكتب معادلة المستقيم المُمثّل بيانياً في الشكل المجاور بصيغة الميل ونقطة:



1 **الخطوة** أجد الميل.

أختار نقطتين على المستقيم وأجد الميل.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3 - (-5)}{2 - (-1)} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

صيغة الميل

أعوّض عن $(x_1, y_1) = (-1, -5)$ وعن $(x_2, y_2) = (2, 3)$

أبسّط

2 **الخطوة** أعوّض في صيغة الميل ونقطة.

أعوّض الميل وإحداثيات إحدى النقطتين في صيغة الميل ونقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - 3 = \frac{8}{3}(x - 2)$$

$$m = \frac{8}{3}, (x_1, y_1) = (2, 3)$$

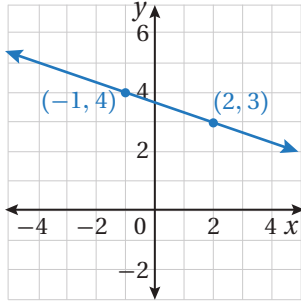
إذن، معادلة المستقيم $y - 3 = \frac{8}{3}(x - 2)$

الوحدة 3

أتحقق من فهمي: ✓

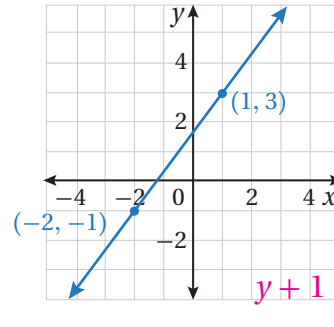
أكتب معادلة المستقيم المُمثل بيانياً في كلِّ ممَّا يأتي بصيغة الميل ونقطة:

2



$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

3



$$y + 1 = \frac{4}{3}(x + 2)$$

يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة بيانات مُمثَّلة في جدول، إذا كان معدَّل التغيُّر نفسه بين الأزواج المرتبة المتتالية فيه، ويكون معدَّل التغيُّر في هذه الحالة هو الميل.

مثال 4: من الحياة

ضغط الماء: يبيِّن الجدول المجاور العلاقة بين ضغط الماء والعمق.

العمق (m)	الضغط (atm)
0	1
10	2
40	5
50	6

1 أبين أن العلاقة بين ضغط الماء والعمق خطية.

أجد معدَّل التغيُّر بين الأزواج المرتبة المتتالية في الجدول.

أَعْلَمُ

يُقاس ضغط الماء بوحدة الأتْموسفير (atm)

العمق (m)	الضغط (atm)
0	1
10	2
40	5
50	6

$$\frac{1}{10} = 0.1 \quad , \quad \frac{3}{30} = 0.1 \quad , \quad \frac{1}{10} = 0.1$$

إذن، العلاقة بين ضغط الماء والعمق خطية، ومعدَّل التغيُّر هو 0.1 atm لكلِّ متر.

2 أكتب معادلةً خطيةً بمتغيرين بصيغة الميل ونقطة يمكن استعمالها لإيجاد ضغط الماء عند أي عمق. بما أن معدّل التغيّر يمثل الميل، إذن أعوض الميل وإحداثيات أي نقطة في الجدول في صيغة الميل والنقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - 5 = 0.1(x - 40)$$

$$m = 0.1, (x_1, y_1) = (40, 5)$$

إذن، معادلة المستقيم $y - 5 = 0.1(x - 40)$

✓ **أتحقّق من فهمي:**

3 **منطاد:** يبيّن الجدول المجاور العلاقة بين ارتفاع منطاد هواءٍ ساخنٍ والزمن.

3 أُبين أنّ العلاقة بين ارتفاع المنطاد والزمن خطية.

4 أكتب معادلةً خطيةً بمتغيرين بصيغة الميل ونقطة يمكن استعمالها لإيجاد ارتفاع

المنطاد عند أي لحظة. معدّل التغيّر وهو ثابت يمثل الميل -2.5 ،

$$y - 640 = -2.5(x - 10)$$

الارتفاع (m)	الزمن (s)
640	10
590	30
490	70
440	90



أتحرب
وأحل المسائل

أكتب معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المُعطاة والمعلوم ميله m في كلّ ممّا يأتي بصيغة الميل ونقطة:

1 $(4, -3), m = \frac{3}{4}$
 $y + 3 = \frac{3}{4}(x - 4)$

2 $(-2, -7), m = -5$
 $y + 7 = -5(x + 2)$

أكتب معادلة المستقيم المارّ بكلّ نقطتين ممّا يأتي بصيغة الميل ونقطة:

3 $(3, 7), (-3, 5)$ 4 $(-1, 8), (9, -6)$ 5 $(-1, 6), (-3, 10)$
 $y - 7 = \frac{1}{3}(x - 3)$ $y - 8 = -\frac{7}{5}(x + 1)$ $y - 6 = -2(x + 1)$

أمثّل كلّ معادلة ممّا يأتي بيانياً باستعمال الميل ونقطة:

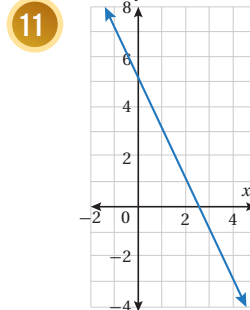
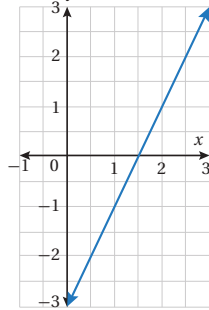
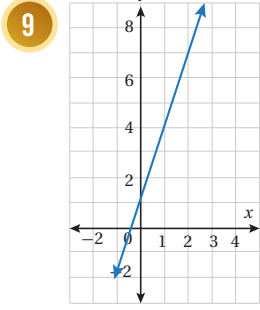
(6-8) أنظر الهامش.

6 $y + 3 = 2(x - 1)$ 7 $y - 1 = -3(x + 2)$ 8 $y - 2 = \frac{4}{9}(x - 3)$

الوحدة 3

أكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

$$m = -2, y - 5 = -2(x - 0)$$



$$m = 3, y - 1 = 3(x - 0)$$

$$m = 2, y - 0 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

جَبْرٌ: إذا كان ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(-1, p)$, $(3p, -5)$ يساوي $-\frac{4}{5}$,

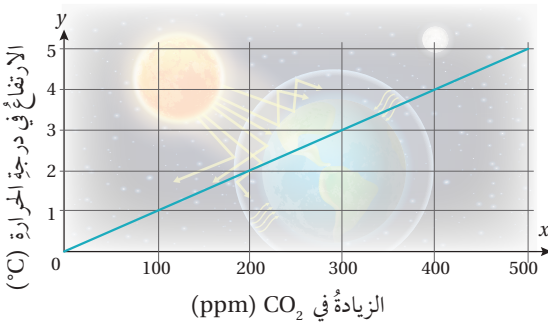
فأجد قيمة الثابت p . $p = 3$

بعوضٌ: تمثل المعادلة $N - 50 = 2(t - 10)$ عدد البعوض N

(بالآلاف) في مستنقع صغير بعد t يوماً من بداية شهر حزيران.

أمثل المعادلة بيانياً، حيث $t \geq 0$. أنظر ملحق الإجابات.

بعد كم يوم من بداية الشهر يكون عدد البعوض في المستنقع 46000؟ 8



بيئة: التمثيل البياني المجاور

للتنبؤ بالعلاقة بين زيادة ثاني

أكسيد الكربون في الغلاف

الجويّ بالأجزاء من مليون

(ppm) وارتفاع متوسط

درجة الحرارة في العالم بالسيلسيوس.

15 إذا زاد CO_2 بمقدار 300 ppm، فما الارتفاع المتوقع في درجة الحرارة؟ 3

16 ارتفعت درجة الحرارة بين عامي 1980 م و 2000 بمقدار 0.4°C أجد مقدار الزيادة

في كمية ثاني أكسيد الكربون. 40

17 أكتب معادلةً خطيةً بمتغيرين يمكن استعمالها لإيجاد مقدار الارتفاع في درجة

الحرارة عند أي ارتفاع في كمية CO_2 في الغلاف الجويّ. $y - 1 = 0.01(x - 100)$

معلومة

يُعدُّ ثاني أكسيد الكربون أحد الغازات التي تحبس الحرارة الناتجة من الإشعاع الشمسيّ، ممّا يؤثّر في المناخ.



الزمن (بالسنوات)	محيطُ جذعِ الشجرة (cm)
1	2
2	4
3	6
4	8

أشجار: يبيّن الجدول المجاور العلاقة بين محيطِ جذعِ شجرة والزمن.

أبيّن أنّ العلاقة بين محيطِ جذعِ الشجرة والزمن خطية.

أكتب معادلةً خطيةً بمتغيرين يمكن استعمالها لإيجاد محيطِ جذعِ الشجرة في أيّ سنة. $y = 2x$

أنتبأ بمحيطِ جذعِ الشجرة بعدَ 10 سنوات. 20 cm

معلومة

بعض الأشجار التي تُقطع جذعها لديها القدرة على جذب النيتروجين من الجو وتسميد المنطقة المحيطة بها.

18

19

$$18 \quad \frac{4-2}{2-1} = \frac{6-4}{3-2} = \frac{8-6}{4-3} = 2$$

الميل = 2، إذن العلاقة خطية.

20

مهارات التفكير العليا

تبرير: أوجد كلٌّ من باسَمٍ ولين معادلةً المستقيم المارَّ بالنقطتين $(1, 6)$, $(-2, -6)$ على النحو الآتي:

لِين
$y + 6 = 4(x + 2)$

بَاسَمٍ
$y - 6 = 4(x - 1)$

هل إجابة كلٍّ منهما صحيحة؟ أبرر إجابتي. الإجابتان صحيحتان، استعمل كل منهما نقطة مختلفة، ومعادليهما متكافئتان.

22

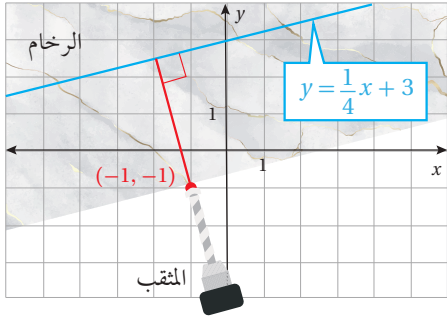
تبرير: كيف سيتغيّر التمثيل البياني للمعادلة $y - 12 = 8(x - 2)$ ، إذا تغيّرت إشاراتا الطرح في المعادلة إلى إشاراتي جمع؟ أبرر إجابتي دون اللجوء إلى تمثيل المعادلة بيانياً. أحصل على مستقيم يوازي الأول وتنعكس إشارتي المقطع x ، و المقطع y .

23

تبرير: أجد معادلةً المستقيم المارَّ بالنقطتين $(5, 5)$, $(9, 1)$ بصيغة الميل والمقطع، ثمّ أبيّن أنّ المقطع x يساوي 10، مبرراً إجابتي. عندما $y = 0$ فإن $x = 10$ وهو المقطع x .

24

أكتب: كيف أكتب معادلةً مستقيم إذا علم ميله ونقطة يمرُّ بها؟ أنظر إجابات الطلبة.



أستكشف

يُوصَلُ رأسُ مِثْقَبِ رُخَامٍ بِالحاسوبِ؛ لتحديدِ إحداثيَّاتِ نقطةِ الثَّقْبِ والعمقِ الذي يجبُ أن يبلغه المِثْقَبُ.

أفترضُ أن رأسَ المِثْقَبِ عندَ النقطةِ

$(-1, -1)$ ، أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ برأسِ المِثْقَبِ والعموديِّ على

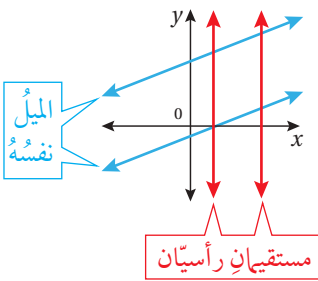
مستقيمٍ يقعُ على سطحِ الرُّخَامِ ومعادلتهُ هي: $y = \frac{1}{4}x + 3$.

فكرة الدرس

- أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةٍ مُعطاةٍ ويوازي مستقيماً معلوماً.
- أكتبُ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بنقطةٍ مُعطاةٍ ويعامدُ مستقيماً معلوماً.

المصطلحات

مستقيمان متوازيان، مستقيمان متعامدان، معكوس المقلوب.



$$y + 1 = -4(x + 1) \Rightarrow y = -4x - 5$$

يُسمَّى المستقيمان الواقعان في المستوى نفسه ولا يقطع أحدهما الآخر **مستقيمين متوازيين** (parallel lines)، ويكون لهما الميل نفسه. والمستقيمات الرأسية جميعها متوازية.

مثال 1

1 أكتبُ بصيغة الميل والمقطع معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطة $(-2, 5)$ والموازي للمستقيم $y = \frac{3}{2}x - 7$.

1 **الخطوة** أجد ميل المستقيم المُعطى.

$$\text{ميل المستقيم } y = \frac{3}{2}x - 7 \text{ هو } \frac{3}{2}$$

2 **الخطوة** أكتبُ معادلةَ المستقيمِ بصيغة الميل والمقطع باستعمال الميل والنقطة المُعطاة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

أبدأ بصيغة الميل ونقطة

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - (-2))$$

$$m = \frac{3}{2}, (x_1, y_1) = (-2, 5)$$

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 2)$$

أبسط

$$y - 5 = \frac{3}{2}x + 3$$

خاصية التوزيع

$$y - 5 + 5 = \frac{3}{2}x + 3 + 5$$

أجمع 5 إلى الطرفين

$$y = \frac{3}{2}x + 8$$

أبسط

أتحقق من فهمي:

$$y + 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 7$$

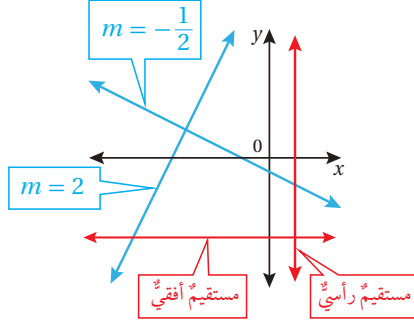
أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(3, -1)$ والموازي للمستقيم $y = 2x + 5$.

أعلم

$$\frac{3}{4} \text{ معكوس مقلوب}$$

$$-\frac{4}{3} \text{ لأن:}$$

$$\frac{3}{4} \times -\frac{4}{3} = -1$$



يسمى المستقيمان اللذان يتقاطعان مُكوّنين زوايا قوائم مستقيمين متعامدين (perpendicular lines). ويكون ميل أحدهما معكوس مقلوب (opposite reciprocals) ميل الآخر، وهذا يعني أنّ حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 والمستقيمتان الرأسية والأفقية متعامدة.

مثال 2

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(4, 0)$ والعموديّ على المستقيم $4y = -8x + 1$.

الخطوة 1 أجد ميل المستقيم المُعطى.

لإيجاد ميل المستقيم المُعطى أحتاج إلى كتابة المعادلة بصورة الميل والمقطع.

$$4y = -8x + 1$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{-8x}{4} + \frac{1}{4}$$

$$y = -2x + \frac{1}{4}$$

معادلة المستقيم المُعطى

أقسم طرفي المعادلة على 4

أبسط

ميل المستقيم $y = -2x + \frac{1}{4}$ هو -2 .

الخطوة 2 أجد ميل المستقيم العموديّ على المستقيم المُعطى.

ميل المستقيم العموديّ على المستقيم المُعطى يساوي معكوس مقلوب العدد -2 ؛ أي $\frac{1}{2}$.

الخطوة 3 أكتب معادلة المستقيم العموديّ بصيغة الميل والمقطع.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

أبدأ بصيغة الميل ونقطة

أعوض $m = \frac{1}{2}$, $(x_1, y_1) = (4, 0)$

أبسط

خاصية التوزيع

الوحدة 3

ميل المستقيم المعطى يساوي 3 \Leftarrow ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $-\frac{1}{3}$

$$y-8 = -\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{25}{3}$$

أتحقق من فهمي:

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (1, 8) والمُعَامِدِ للمستقيم $3y - 9x = 12$.

يمكن تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك من خلال الميل.

مثال 3

1 أحدد ما إذا كان المستقيمان $-3x + 4y = 32$ و $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

1 الخطوة أجد ميل كل مستقيم.

• ميل المستقيم $-3x + 4y = 32$

معادلة المستقيم المعطى

أجمع $3x$ إلى كلا الطرفين

أقسم طرفي المعادلة على 4

أبسط

$$-3x + 4y = 32$$

$$-3x + 4y + 3x = 32 + 3x$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{32}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + 8$$

إذن، ميل المستقيم $-3x + 4y = 32$ يساوي $\frac{3}{4}$

• ميل المستقيم $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ يساوي $\frac{3}{4}$

2 الخطوة أحدد العلاقة بين المستقيمين.

بما أن ميلَي المستقيمين متساويان، إذن، فالمستقيمان متوازيان.

2 أحدد ما إذا كان \overleftrightarrow{AB} و \overleftrightarrow{CD} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $A(1, 1)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 2)$, $D(6, 1)$

1 الخطوة أجد ميل كل مستقيم.

• ميل \overleftrightarrow{AB}

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-5 - 1}{-1 - 1}$$

$$= \frac{-6}{-2} = 3$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ (1, 1) وعن (x_2, y_2) بـ (-1, -5)

أبسط

• مِيلُ \overrightarrow{CD}

صيغة المِيل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{1 - 2}{6 - 3}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

أعوّض عن (x_1, y_1) بـ $(3, 2)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(6, 1)$

أُبسطُ

الخطوة 2 أهددُ العلاقة بين المستقيمين.

الميلان غير متساويين، إذن، فالمستقيمان غير متوازيين. ولتحديد ما إذا كان المستقيمان متعامدين أجد حاصل ضرب مَيْلَيْهِمَا.

$$3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

بما أن حاصل ضرب مَيْلَيْ \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} يساوي -1 ، إذن، فالمستقيمان متعامدان.

مِيل المستقيم $y = -2x + 7$ يساوي -2 ، مِيل المستقيم $y = 2x + 3$ يساوي 2
إذن المستقيمان غير متوازيين، وغير متعامدين.

✓ **أتتحقق من فهمي:**

3 أهددُ ما إذا كان المستقيمان $2x + y = 7$ و $y - 2x = 3$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

4 أهددُ ما إذا كان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $A(3, 6)$, $B(-9, 2)$, $C(5, 4)$, $D(2, 3)$

مِيل \overrightarrow{AB} : $\frac{1}{3} = \frac{-4}{-12}$ ، مِيل \overrightarrow{CD} : $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$ ، إذن المستقيمان متوازيان.

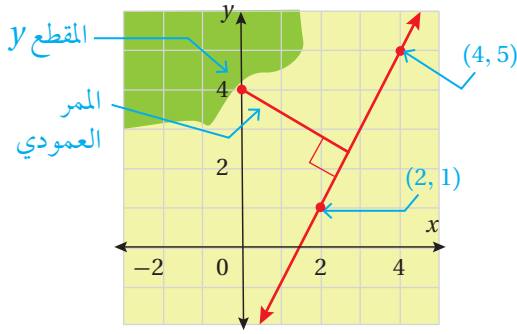
يمكن كتابة معادلة أي مستقيم يمر بنقطة معلومة يوازي أو يعامد مستقيماً معلوماً في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 4: من الحياة



عمارة: ترغب إحدى البلديات بربط مدخل الحديقة العامة بمسار الجري داخل الحديقة من خلال ممر عمودي على المسار. معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل مخطط الحديقة، أجد معادلة المستقيم الذي يمثل الممر.

الوحدة 3



الخطوة 1 أجد ميل المستقيم الذي يمثل مسار الجري. تقع النقطتان (2, 1), (4, 5) على مسار الجري، إذن، يمكن من خلالهما إيجاد ميل المستقيم الذي يمثل المسار.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{5 - 1}{4 - 2} \quad \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (2, 1) \text{ وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (4, 5)$$

$$= \frac{4}{2} = 2 \quad \text{أبسّط}$$

الخطوة 2 أجد ميل المستقيم الذي يمثل معادلة الممر.

بما أن الممر عمودي على مسار الجري، إذن، أجد مقلوب معكوس ميل مسار الجري. بما أن ميل مسار الجري يساوي 2، فإن مقلوب معكوسه $-\frac{1}{2}$.

الخطوة 3 أجد معادلة المستقيم الذي يمثل الممر.

بما أن المستقيم الذي يمثل الممر يقطع المحور y في النقطة (0, 4)، إذن، فإن المقطع y له يساوي 4، وعليه فإن معادلة الممر بصيغة الميل والمقطع هي:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

أنتحق من فهمي:

في المثال السابق، تخطت البلدية لإنشاء مسار ركض آخر داخل الحديقة مواز لمسار الركض الأول ويمر في مدخل الحديقة. أجد معادلة المستقيم الذي يمثل مسار الركض الجديد. $y - 4 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 4$

أتحرب
وأحل المسائل

أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المُعطاة والموازي للمستقيم المُعطاة معادلته في كلِّ ممّا يأتي:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$$

1 $(-1, 5), y = \frac{1}{2}x - 10$

2 $(2, -7), 2y = 5x - 3$
 $y = \frac{5}{2}x - 12$

3 $(4, 8), x + 4y - 9 = 0$

4 $(9, 3), 2x - 7y + 1 = 0$

$$y = -\frac{1}{4}x + 9$$

$$y = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}$$

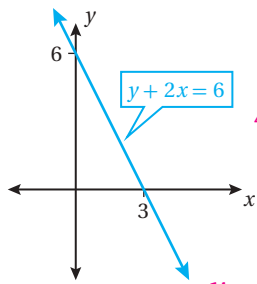
أكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارّ بالنقطة المُعطاة والمُعامد للمستقيم المُعطاة معادلته في كلِّ ممّا يأتي:

5 $(2, -7), y = x - 2$
 $y = -x - 5$

7 $(2, 2), 3y = -2x + 6$
 $y = \frac{3}{2}x - 1$

6 $(-5, -4), y = \frac{1}{2}x + 1$
 $y = -2x - 14$

8 $(-3, 0), 3x - 4y = -4$
 $y = -\frac{4}{3}x - 4$



يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للمستقيم الذي معادلته $y + 2x = 6$

$4 + 2(1) \stackrel{?}{=} 6, 6 = 6 \checkmark$

أبيّن أنّ النقطة $(1, 4)$ تقع على المستقيم.

أجد ميل المستقيم. $m = -2$

أكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة. $y - 0 = -2(x - 3)$

أجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة الأصل والموازي للمستقيم المُعطى بصيغة الميل والمقطع.

$y - 0 = -2(x - 0)$

يحتوي الصندوق المجاور على زوجين من المستقيمات المتعامدة. فأيّ المستقيمات مختلف؟ أبرّر إجابتي. المستقيم الذي معادلته $6x + 3y = 7$ ميله -2 ، وناتج ضرب ميله في ميل أي مستقيم آخر لا يساوي -1

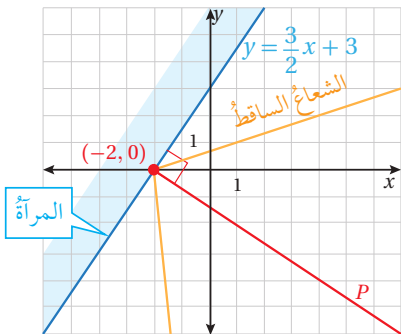
أحدّد ما إذا كان المستقيمان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلِّ ممّا يأتي:

14 $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$
ميل $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}$ ، ميل $\overrightarrow{CD} = 4 \leftarrow$ متعامدان.

15 $A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1)$
ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}$ ، ميل $\overrightarrow{CD} = -4 \leftarrow$ متعامدان.

16 $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -1), D(-6, -5)$
ميل $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}$ ، ميل $\overrightarrow{CD} = \frac{4}{15} \leftarrow$ غير متوازيين، وغير متعامدين.

17 $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$
ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{7}$ ، ميل $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \leftarrow$ غير متوازيين، وغير متعامدين.



أشعة: تمثّل المعادلة $y = \frac{3}{2}x + 3$

مستقيماً يقع على سطح مرآة، وتمثّل النقطة

$(-2, 0)$ نقطة التقاء الشعاع الساقط مع

هذا المستقيم، أجد معادلة العمود P المُقام

على المرآة.

$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

9

10

11

12

13

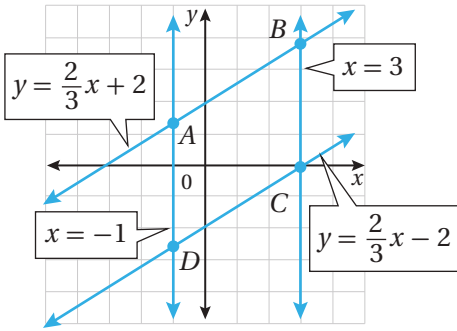
$3x + 5y = 7$
 $6x + 3y = 7$
 $3y - 5x = 7$
 $8x - 4y = 7$
 $4y + 2x = 7$

أتذكّر

زاوية سقوط الشعاع تساوي زاوية انعكاسه.

18

الوحدة 3



19 أستعمل الميل لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المبيّن في التمثيل البياني المجاور يمثل متوازي أضلاع.

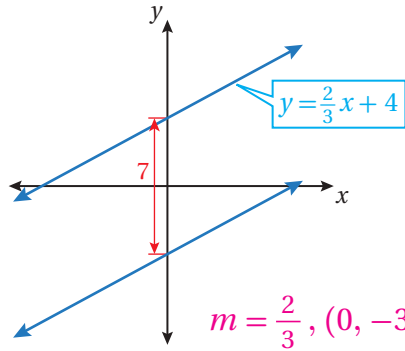
$$\vec{DC} \parallel \vec{AB}, \frac{2}{3} = \vec{DC} \text{ ميل}, \frac{2}{3} = \vec{AB} \text{ ميل}$$

ميل \vec{CB} غير معرّف، ميل \vec{AD} غير معرّف، $\vec{AD} \parallel \vec{CB}$ الشكل متوازي أضلاع.

تبرير: تمثل النقاط $A(5, 10), B(1, 5), C(6, 1)$ ثلاثة رؤوس لمتوازي الأضلاع $ABCD$

أجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين A و C . الميل -9 ، $y = -9x + 55$

أجد إحداثيّ نقطتين مُحتملتين للرأس الرابع D لمتوازي الأضلاع، مبرّرًا إجابتي. $D_1 = C(6, 1) + (4, 5) = (10, 6)$, $D_2 = C(6, 1) + (-4, -5) = (2, -4)$



21 تبرير: بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم السفلي، وأبرّر إجابتي.

$$m = \frac{2}{3}, (0, -3) \Rightarrow y + 3 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 3$$

22 تحدّد: أجد قيمة a التي تجعل المستقيمين $y = ax + 5$ و $2y = (a+4)x - 1$ متوازيين.

$$\frac{a+4}{2} = a \Rightarrow a = 4$$

23 كيف يمكن تحديد ما إذا كان مستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك؟ أنظر إجابات الطلبة.

أتذكّر

متوازي الأضلاع شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

مهارات التفكير العليا

إرشاد

ترتيب قراءة الرؤوس غير مهم.

اختبار الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(5, -4)$ و $(5, -10)$:

(a) موجب (b) سالب

(c) صفر (d) غير مُعرّف

2 ميل المستقيم المارّ بالنقطة $(0, 0)$ هو 2، فأَيُّ النقاطِ

الآتية تقع أيضًا على المستقيم؟

(a) $(-4, 2)$ (b) $(2, 4)$

(c) $(-2, 4)$ (d) $(2, -4)$

3 المقطع y للتمثيل البياني للمعادلة $5x + 2y = 30$ هو:

(a) -15 (b) -6

(c) 6 (d) 15

4 المقطع x للتمثيل البياني للمعادلة $y = 4x + 32$ هو:

(a) -32 (b) -8 (c) 8 (d) 32

5 أيُّ المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا ميله $\frac{1}{3}$ ويمرّ بالنقطة $(-2, 1)$ ؟

(a) $y = \frac{1}{3}x + 1$ (b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

(c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ (d) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

6 أيُّ المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا له أكبر ميل؟

(a) $y = 3x$ (b) $y = x + 12$

(c) $y = 5x - 1$ (d) $y = 8x + 4$

أبين أيُّ العبارات الآتية صحيحة دائمًا وأيُّها خطأ:

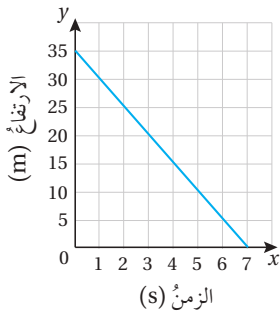
7 جميع المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه. **صحيحة**

8 إذا كان ميل المستقيم 1، فإنه يمرُّ بنقطة الأصل. **خطأ**

9 معدل التغيير يكون إما سالبًا وإما موجبًا. **خطأ**

10 إذا كان لنقطتين الإحداثي x نفسه فهما تقعان على

المستقيم الرأسي نفسه. **صحيحة**



يبيّن الشكل المجاور العلاقة بين ارتفاع طائرة عمودية بالأمتار والزمن بالثواني اللازم لوصولها إلى سطح الأرض.

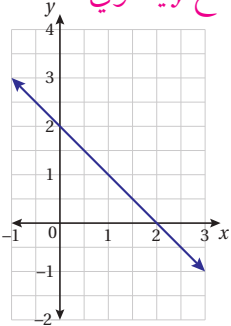
11 بعد كم ثانية تصل الطائرة إلى سطح الأرض؟ **7 s**

12 بعد كم ثانية تكون الطائرة على ارتفاع 15 m؟ **4 s**

13 ما مدلول المقطع y في هذه الحالة؟

ارتفاع الطائرة قبل البدء بالهبوط.

الميل -1 ، المقطع x يساوي 2، المقطع y يساوي 2



21 أجد الميل والمقطعين الإحداثيين للمستقيم الممثل في المستوى الإحداثي المجاور.

تدريب على الاختبارات الدولية

22 ميل المستقيم المارّ بالنقطتين (a, b) و (c, d) هو:

- a) $\frac{d-c}{b-a}$ b) $\frac{b-d}{a-c}$
c) $\frac{d-b}{a-c}$ d) $\frac{a-c}{b-d}$

23 مستقيم أفقي يمرّ بالنقطة $(5, 22)$ ، فأَيُّ النقاط الآتية تقع على المستقيم؟

- a) $(5, 2)$ b) $(0, 22)$
c) $(22, 5)$ d) $(0, 5)$

24 أيُّ المعادلات الآتية تمثل معادلة مستقيم أفقي؟

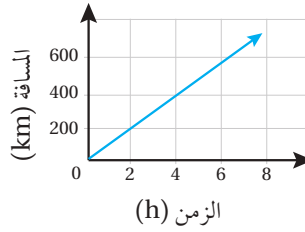
- a) $3x + 6y = 0$ b) $2x + 7 = 0$

- c) $-3y = 29$ d) $x - 2y = 4$

25 أيُّ المعادلات الآتية المقطع y لها لا يساوي 5؟

- a) $2x = y - 5$ b) $3x + y = 5$

- c) $y = x + 5$ d) $2x - y = 5$



يبين التمثيل البياني المجاور العلاقة بين المسافة التي قطعها شاحنة على طريق مُنحدر والزمن الذي استغرقت.

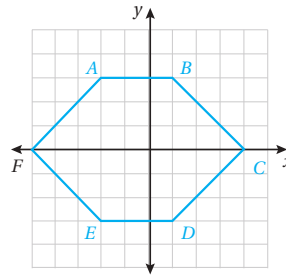
14 أجد المسافة التي قطعها الشاحنة بعد 4 ساعات من

انطلاقها. 400 km

15 هل تسير الشاحنة بسرعة ثابتة على الطريق؟ أبرّر إجابتي.

نعم؛ لأن التمثيل البياني مستقيم.

يبين الشكل الآتي المضلع السداسي $ABCDEF$.



16 أجد ميل كلٍّ من:

\vec{AE}, \vec{AD}

17 أجد معادلة كلٍّ من:

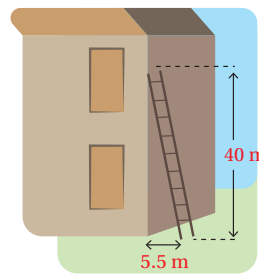
$\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{AF}$

(16-17) أنظر الهامش.

18 أجد ميل السلم في

الشكل المجاور.

$$\frac{-40}{5.5} \approx -7.27$$



تمثل المعادلة $y = 5x + k$ مستقيماً يمرّ بالنقطة

$(2, 11)$.

19 أجد قيمة k . $k = 1$

20 أجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم في الفرع

السابق المارّ بالنقطة $(4, 11)$. $y = 5x - 9$

المثلثات المتطابقة

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستعمل المثلثاتُ كثيرًا في التصميم الهندسية؛ لأنَّ خصائصها الهندسية تضيفُ قوةً كبيرةً وجمالًا للتصميم؛ فأَيُّ قوةٍ تؤثرُ في المثلثِ تتوزعُ بالتساوي على أضلاعِهِ، لذلك نرى المثلثاتِ كثيرًا في الجسور، والمباني، وأعمدة الكهرباء العالية، والرافعات.



سأتعلمُ في هذه الوحدة:

- إثبات تطابق مثلثين باستخدام حالات التطابق المتعددة.
- تعرّف خصائص المثلث المتطابق الضلعين والمتطابق الأضلاع.
- حلّ مسائل حياتية على تطابق المثلثات.

تعلمتُ سابقًا:

- ✓ تصنيف المثلثات بحسب أطوال أضلاعها وزواياها.
- ✓ تمييز المضلعات المتطابقة، وتحديد العناصر المتناظرة في مضلعين متطابقين.
- ✓ حلّ مسائل تعتمد على مفهوم التطابق.



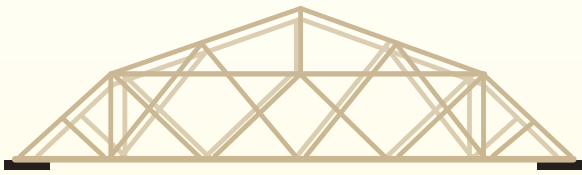
مشروع الوحدة: أبنى جسراً

3 أبدأ بتصميم الجسر، وإصاق الأعواد بشكل جيد؛ لضمان ثبات الجسر، ويمكنني البحث عن مقاطع فيديو تساعدني على تنفيذ التصميم باستعمال الكلمات المفتاحية السابقة.

4 أعد عرضاً تقديمياً يتضمن صوراً لجسور معدنية عالمية استعملت المثلثات في تصميمها. أضيف بعض المعلومات حول كل جسر، مثل: الطول، والبلد الذي يقع فيه، وتاريخ الإنشاء.

عرض النتائج:

- أعرض جسري أمام الصف، وأحدد المثلثات المتطابقة فيه.
- أقدم العرض التقديمي، وأتحدث بالتفصيل حول الجسور التي يحتويها.
- نصوت لأجمل جسر.



أستعد ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص، الذي سنوظف فيه ما تعلمناه في هذه الوحدة حول تطابق المثلثات، لعمل نموذج جسر.



المواد والأدوات اللازمة:

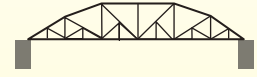
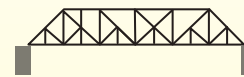
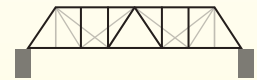
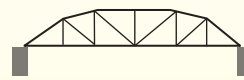
- أعواد آيس كريم.
- سيليكون لاصق.

خطوات تنفيذ المشروع:

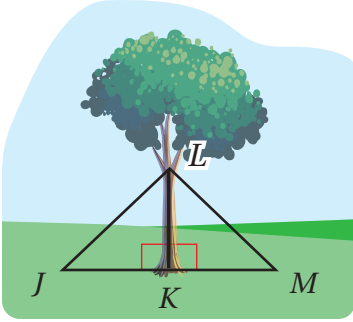
تستعمل المثلثات المتطابقة كثيراً في تصميم الجسور؛ لأنها توزع الأحمال بالتساوي بين أجزاء الجسر، مما يزيد من قدرته على تحمل الأثقال.

1 أبحث في شبكة الإنترنت عن تصاميم لجسور باستعمال أعواد الآيس كريم، مستعيناً بالكلمات المفتاحية الآتية: ice cream stick bridge, popsicle stick bridge.

2 أختار تصميمًا جميلًا وجاذبًا للجسر، ثم أرسّم مخططاً له على ورقة، وأحرص على استعمال المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع بشكل متماثل في تصميمي.



أستكشف



يستعمل المزارعون طرائق مختلفة لدعم الأشجار الصغيرة، منها الطريقة المبيّنة في الشكل المجاور، حيث تثبت الشجرة بأسلاكٍ تصل بين جذعها وأوتادٍ في الأرض.

ما العلاقة بين ΔLKM و ΔLKJ التي تجعل الشجرة أكثر ثباتاً؟

فكرة الدرس

- أثبت تطابق مثلثين باستعمال حالتَي SSS و SAS.
- أثبت تطابق مثلثين قائمَي الزاوية باستعمال حالة HL.

المصطلحات

المسلمة، النظرية، البرهان، البرهان السهمي، الزاوية المحصورة، البرهان ذو العمودين.

المسلمة (Postulate) عبارة رياضية تُقبل على أنها صحيحة من دون برهان، أما **النظرية** (theorem) فهي عبارة أو تخمين تحتاج إلى كتابة **برهان** (proof) لإثبات صحتها؛ فالبرهان دليل منطقي على كل عبارة مكتوبة فيه تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها أو قبول صحتها، ويمكن استعمال العبارات أو التخمينات المثبت صحتها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى.

خطوات كتابة البرهان

مفهوم أساسي

الخطوة 1: أكتب المعطيات وأرسم شكلاً يوضحها إن أمكن.

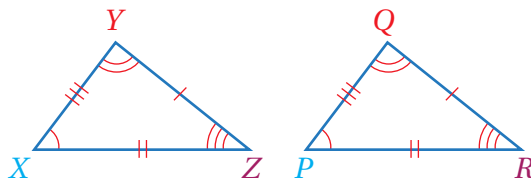
الخطوة 2: أكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3: أكوّن سلسلة من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

الخطوة 4: أبرر كل عبارة مستعملاً تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

الخطوة 5: أكتب العبارات أو التخمين الذي أثبتته.

تعلمت سابقاً أنه إذا كانت الأضلاع المتناظرة في شكلين هندسيين متطابقة، وزواياهما المتناظرة متطابقة، فإن الشكلين متطابقان، فمثلاً المثلثان الآتيان متطابقان؛ لأن:



$$\overline{XZ} \cong \overline{PR} \quad \angle Y \cong \angle Q$$

$$\overline{XY} \cong \overline{PQ} \quad \angle X \cong \angle P$$

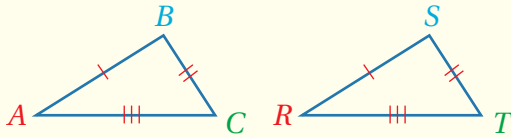
$$\overline{YZ} \cong \overline{QR} \quad \angle Z \cong \angle R$$

الوحدة 4

لكن هذه المعلومات أكثر من كافية لإثبات تطابق مثلثين، إذ يمكن إثبات ذلك باستعمال تطابق الأضلاع المتناظرة فقط من دون الحاجة إلى بيان تطابق الأجزاء المتناظرة جميعها.

التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

مسلمة



• **بالكلمات:** إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان وتختصر هذه الحالة بالرمز SSS، حيث إن

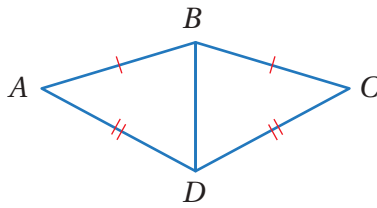
الحرف S هو اختصار للكلمة الانجليزية (Side) وتعني ضلعًا.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\overline{BC} \cong \overline{ST}$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$

فإن: $\triangle ABC \cong \triangle RST$

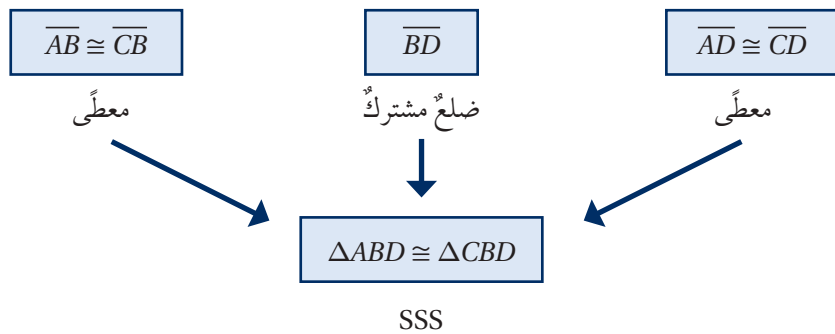
ويمكن استعمال البرهان السهمي (flowproof) لإثبات تطابق مثلثين، وهو برهان تستعمل فيه عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيين التسلسل المنطقي لهذه العبارات، ويكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرر العبارة المكتوبة داخله.

مثال 1



أثبت أن المثلثين $\triangle ABD$ و $\triangle CBD$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان باستعمال البرهان السهمي.

البرهان:



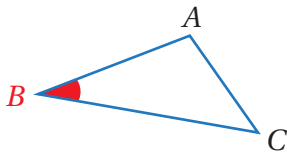
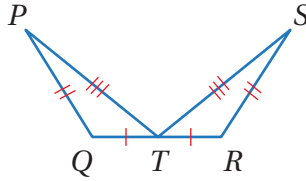
أنت تعلم

يمكن كتابة البرهان السهمي بصورة رأسية أو أفقية.

أتحقق من فهمي:



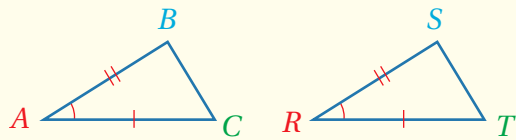
أثبت أن المثلثين ΔQPT و ΔRST المبيّنين في الشكل أدناه متطابقان باستعمال البرهان السهمي.



تُسمّى الزاوية المتكوّنة من ضلعين متجاورين في مضلع الزاوية المحصورة (included angle)، ففي الشكل المجاور $\angle B$ محصورة بين الضلعين \overline{BA} و \overline{BC} .
ومثلما يمكن استعمال حالة (SSS) لإثبات تطابق مثلثين، يمكن أيضًا استعمال زوجين من الأضلاع المتطابقة والزاوية المحصورة بينهما لإثبات تطابق مثلثين.

التطابق بضلعين وزاوية محصورة بينهما (SAS)

مسلمة



• **بالكلمات:** إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة

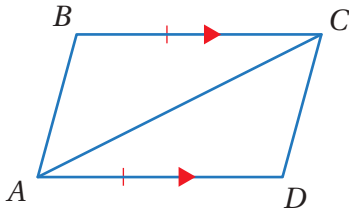
بالرمز SAS، حيث إن الحرف S اختصاراً للكلمة الانجليزية (Side) وتعني ضلعاً، والحرف A اختصاراً للكلمة الانجليزية (Angle) وتعني زاوية.

• **بالرموز:** إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\angle A \cong \angle R$, $\overline{AC} \cong \overline{RT}$ ، فإن: $\Delta ABC \cong \Delta RST$

ويمكن استعمال البرهان ذي العمودين (two-column proof) لإثبات تطابق مثلثين، وهو برهان تكتب فيه العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود مواز له.

الوحدة 4

مثال 2

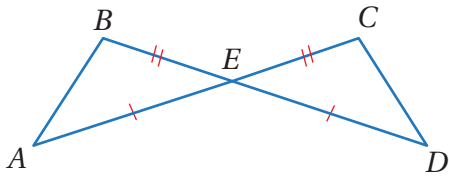


أثبت أن $\triangle ABC$ و $\triangle CDA$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان، باستعمال البرهان ذي العمودين.

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{BC} \cong \overline{DA}$ (1)
(2) معطى	$\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ (2)
(3) زاويتان متبادلتان داخلياً	$\angle BCA \cong \angle DAC$ (3)
(4) ضلع مشترك	\overline{AC} (4)
(5) SAS	$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (5)

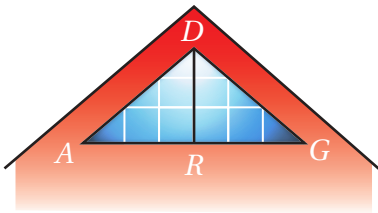
أتحقق من فهمي:



أثبت أن $\triangle ABE$ و $\triangle DCE$ المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان، باستعمال البرهان ذي العمودين.

نحتاج في كثير من المسائل إلى تحديد حالة التطابق المناسبة لإثبات تطابق مثلثين، وفقاً للمعطيات المقدمة في المسألة.

مثال 3: من الحياة

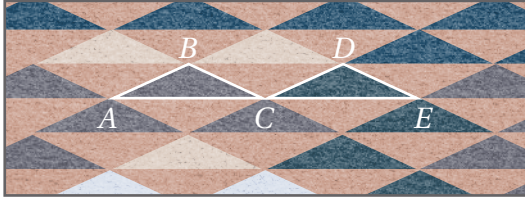


عمارة: صمّم مهندس معماري النافذة المجاورة. إذا كان $\overline{DA} \cong \overline{DG}$ و $\angle ADR \cong \angle GDR$ ، فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن $\triangle DRA \cong \triangle DRG$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{DA} \cong \overline{DG}$ (1)
(2) معطى	$\angle ADR \cong \angle GDR$ (2)
(3) ضلع مشترك	\overline{DR} (3)
(4) SAS	$\triangle DRA \cong \triangle DRG$ (4)

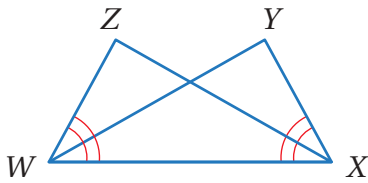
أتحقق من فهمي:



بساط: يبين الشكل المجاور بساطًا تقليديًا يستعمل الحائك في تصميمه انسحابًا لمثلث متطابق الضلعين. أثبت أن $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ المبيّنين في الشكل متطابقان باستعمال البرهان ذي العمودين.

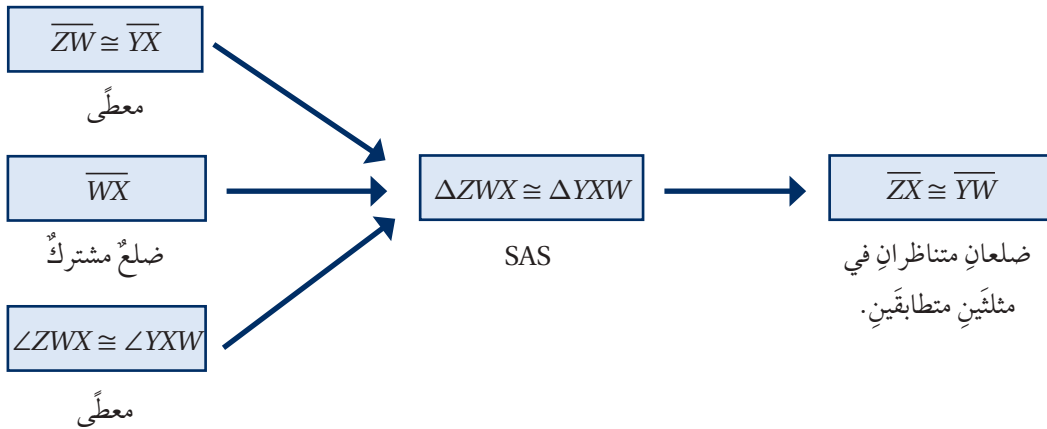
عند إثبات أن المثلثين متطابقان، فإن الأجزاء المتناظرة من المثلثين متطابقة أيضًا وفق التعريف.

مثال 4

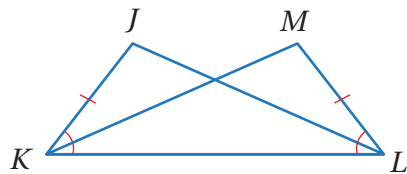


في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle ZWX \cong \angle YXW$ ، و $\overline{ZW} \cong \overline{YX}$ ، فأثبت أن $\overline{ZX} \cong \overline{YW}$ باستعمال البرهان السهمي.

البرهان:



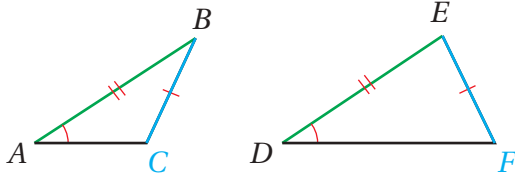
أتحقق من فهمي:



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle JKL \cong \angle MLK$ و $\overline{JK} \cong \overline{ML}$ ، فأثبت أن $\angle J \cong \angle M$ باستعمال البرهان السهمي.

الوحدة 4

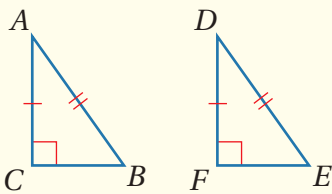
تعلمت في الأمثلة السابقة أنه يمكن استعمال حالتَي SAS و SSS في إثبات تطابق مثلثين. ولكن ماذا عن حالة ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما؟



يبيِّن الشكل المجاور مثلثين فيهما ضلعان متناظران ومتطابقان وزاوية غير محصورة تُطابق زاوية غير محصورة في المثلث الآخر. ولكن المثلثين غير متطابقين. ومن هنا يتبين أن حالة ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما غير فعّالة، إلا أنه يمكن استعمالها في إثبات تطابق مثلثين قائمي الزاوية؛ إذا تطابق وتران، وتطابق ساقان في المثلثين.

تطابق المثلثات القائمة الزاوية بوترٍ وساقٍ (HL)

نظرية



إذا طابق وترٌ وساقٌ في مثلث قائم الزاوية وترًا وساقًا في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.

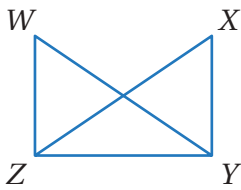
وتُختصر هذه الحالة بالرمز HL، حيث إن الرمز H اختصارًا للكلمة الإنجليزية (Hypotenuse) وتعني وترًا، والحرف L اختصارًا للكلمة الإنجليزية (Leg) وتعني ساقًا.

إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

• بالكلمات:

• بالرموز:

مثال 5



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ و $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$ و $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$ فأكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات أن $\triangle WYZ \cong \triangle XZY$

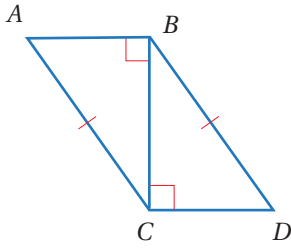
البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$
(2) معطى	(2) $\overline{WZ} \perp \overline{ZY}$, $\overline{XY} \perp \overline{YZ}$
(3) تعريف المستقيمت المتعامدة	(3) $\angle WZY$, $\angle XYZ$ زاويتان قائمتان
(4) تعريف المثلث القائم الزاوية	(4) $\triangle WYZ$, $\triangle XZY$ مثلثان قائما الزاوية
(5) ضلع مشترك	(5) \overline{ZY}
(6) HL	(6) $\triangle WYZ \cong \triangle XZY$

أتحقق من فهمي: ✓

أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور في كتابة برهان ذي عمودين؛

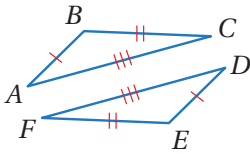
لأثبت أن $\Delta ABC \cong \Delta DCB$



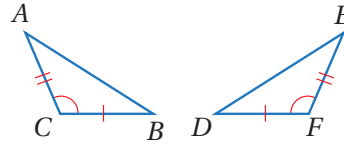
أتحرب وأحل المسائل

أبين أن كل زوج من المثلثات الآتية متطابق أم لا، مبرراً إجابتي:

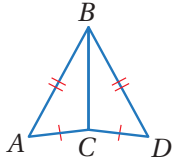
1



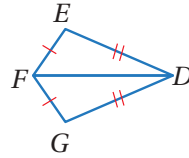
2



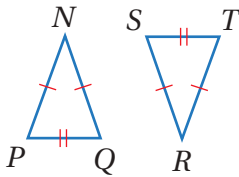
3



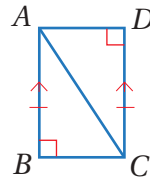
4



6 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي عمودين؛ لأثبت أن $\Delta NPQ \cong \Delta RST$



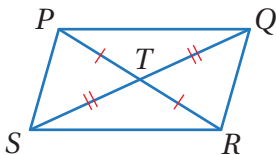
5 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي عمودين؛ لأثبت أن $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



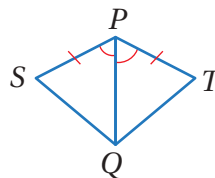
أتذكر

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن لكل زاويتين متبادلتين داخلياً القياس نفسه.

8 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي، لكتابة برهان سهمي؛ لأثبت أن $\Delta PQT \cong \Delta RST$

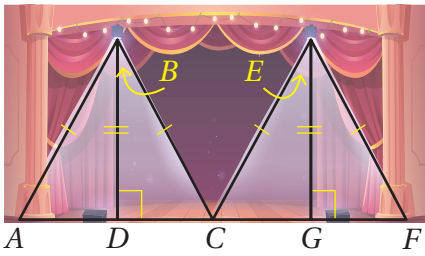
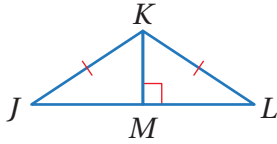


7 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي، لكتابة برهان سهمي؛ لأثبت أن $\Delta SPQ \cong \Delta TPQ$

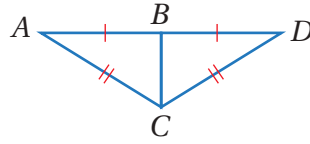


الوحدة 4

10 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي، لكتابة برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبت أن $\overline{JM} \cong \overline{ML}$

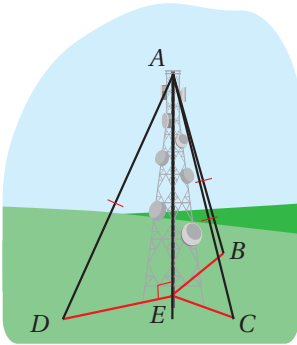


9 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبت أن $\angle A \cong \angle D$

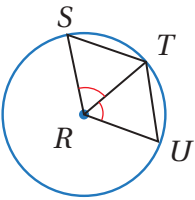


مصباح: يبين الشكل المجاور الضوء الناشئ عن مصباحين يبعدان المسافة نفسها عن أرضية مسرح: أثبت أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

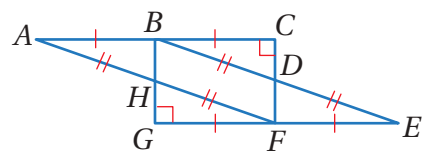
هل المثلثات الأربعة الموضحة في الشكل متطابقة؟ أبرر إجابتي.



13 اتصالات: برج اتصالات عمودي على الأرض، يتصل رأسه بكل من النقاط D و B و C عن طريق كابلات لها الطول نفسه كما في الشكل المجاور. أثبت أن $\triangle AEB$ و $\triangle AEC$ و $\triangle AED$ متطابقة.



14 تبرير: في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle SRT \cong \angle URT$ ، و R مركز الدائرة، فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن $\triangle TRS \cong \triangle TRU$ ، مبرراً إجابتي.



15 تحد: أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور؛ لأثبت أن $\triangle ACF \cong \triangle EGB$

16 أكتب كيف أتحقق من تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع، أو ضلعين وزاوية محصورة بينهما؟



معلومة

اختراع العالم (غراهام بل) النموذج الأولي للهاتف عام 1876، إذ حاول إيجاد وسيلة لمساعدة الصم.

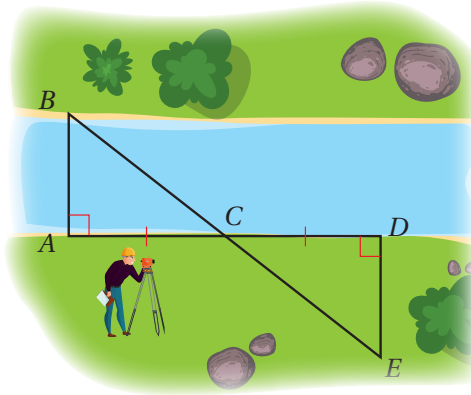
مهارات التفكير العليا

أتذكر

أطوال أنصاف أقطار الدائرة متساوية في الطول.

إرشاد

أرسم $\triangle ACF$ و $\triangle EGB$ بشكل منفصل.



أستكشف

يظهرُ في الشكلِ المجاورِ مسّاحٌ يقيسُ عرضَ نهرٍ مستعملاً تطابقَ المثلثاتِ. أصفُ كيفَ يمكنهُ ذلكُ؟

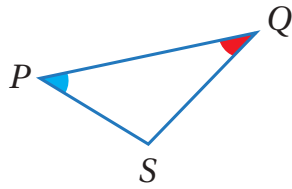
فكرةُ الدرسِ

أثبتُ تطابقَ مثلثينِ باستعمالِ حالتَيِ ASA و AAS.

المصطلحاتُ

الضلعُ المحصورُ.

تعلّمتُ في الدرسِ السابقِ كيفَ أثبتُ تطابقَ مثلثينِ باستعمالِ ثلاثةِ أضلاعٍ أو ضلعينِ وزاويةٍ محصورةٍ بينهما، وسأتعلمُ في هذا الدرسِ حالاتٍ أخرى لإثباتِ تطابقِ مثلثينِ.

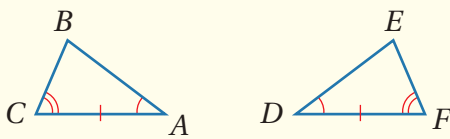


يسمى الضلعُ الواقعُ بينَ زاويتينِ متتاليتينِ في مضلعٍ **الضلعُ المحصورُ** (included side). ففي المثلثِ المجاورِ \overline{PQ} هو الضلعُ المحصورُ بينَ $\angle P$ و $\angle Q$

يمكنُ إثباتُ تطابقِ مثلثينِ باستعمالِ زوجٍ منِ الأضلاعِ المتطابقةِ وزوجينِ منِ الزوايا المتطابقةِ في المثلثينِ.

التطابقُ بزائويتينِ وضلعٍ محصورٍ بينهما (ASA)

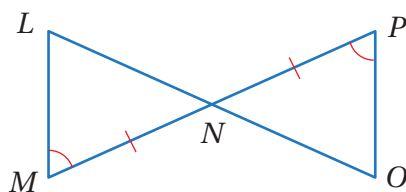
مسلمةٌ



• **بالكلمات:** إذا طابقتْ زاويتانِ والضلعُ المحصورُ بينهما في مثلثٍ نظائرهما في مثلثٍ آخر، فإنَّ المثلثينِ متطابقانِ. وتختصرُ هذه الحالةُ بالرمزِ ASA.

• **بالرموز:** إذا كان: $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$ ، فإنَّ: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

مثال 1



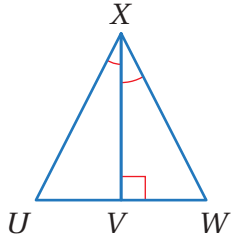
في الشكلِ المجاورِ، إذا علمتُ أنَّ $\overline{NM} \cong \overline{NO}$ و $\angle M \cong \angle P$ ، فأثبتُ أنَّ $\triangle NML \cong \triangle NPO$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودينِ.

الوحدة 4

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{NM} \cong \overline{NP}$ (1)
(2) معطى	$\angle M \cong \angle P$ (2)
(3) زاويتان متقابلتان بالرأس	$\angle MNL \cong \angle PNO$ (3)
(4) ASA	$\triangle NML \cong \triangle NPO$ (4)

أتحقق من فهمي:

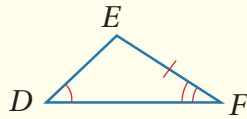
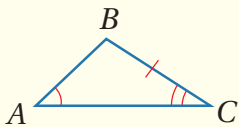


في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\angle UXV \cong \angle WXV$ ، فأثبت أن $\triangle UXV \cong \triangle WXV$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

ويمكن أيضًا إثبات تطابق مثلثين باستعمال زاويتين وضلع غير محصور بينهما.

التطابق بزائويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

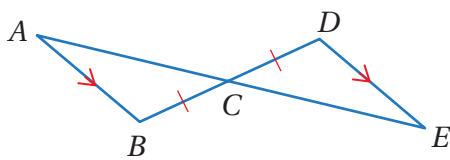
نظرية



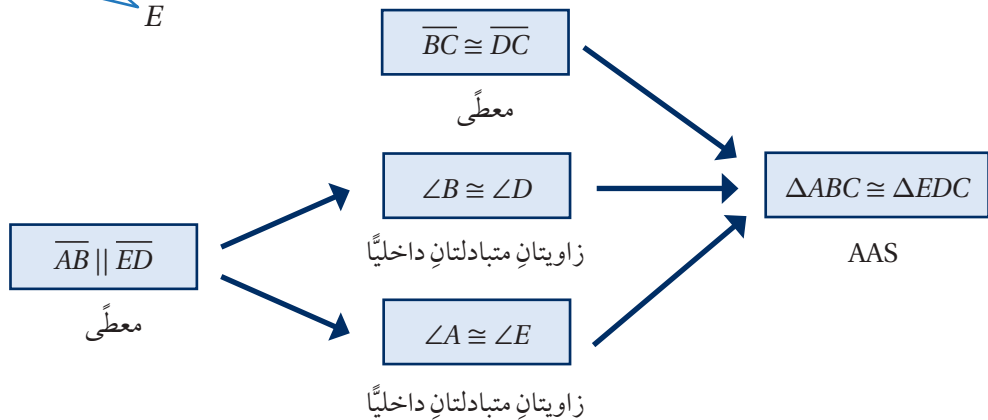
• **بالكلمات:** إذا طبقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان. وتختصر هذه الحالة بالرمز AAS.

• **بالرموز:** إذا كان: $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، فإن: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

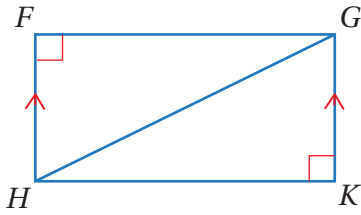
مثال 2



في الشكل المجاور، إذا علمت أن $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ و $\angle A \cong \angle E$ ، فأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ باستعمال البرهان السهمي.



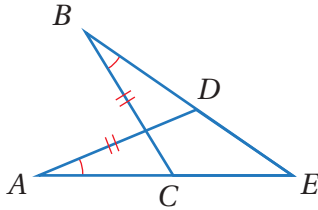
أتحقق من فهمي:



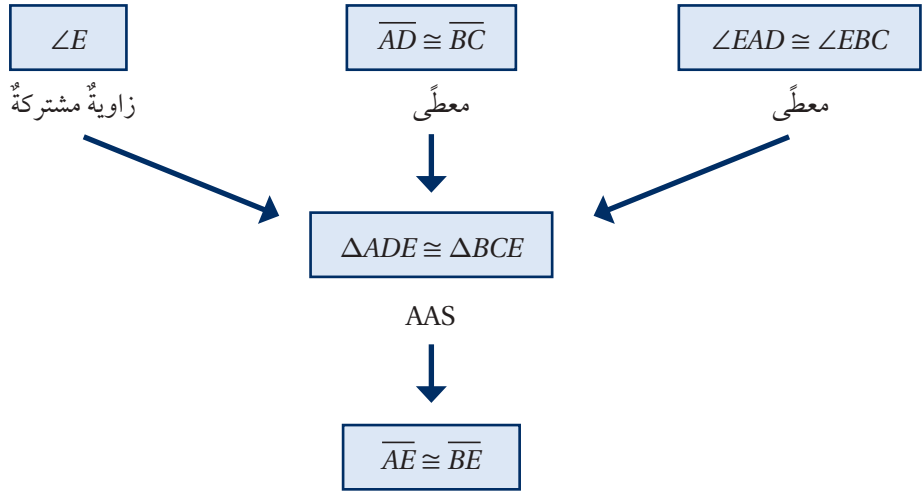
في الشكل المجاور، إذا علمتُ أنَّ $\overline{HF} \parallel \overline{GK}$ ، وأنَّ $\angle F$ و $\angle K$ زاويتان قائمتان، فأثبتُ أنَّ $\triangle HFG \cong \triangle GKH$ باستعمال البرهان السهمي.

تعلمتُ في الدرس السابق أنه عند إثبات أن المثلثين متطابقين، فإن الأجزاء المتناظرة من المثلثين متطابقة أيضًا وفق التعريف.

مثال 3

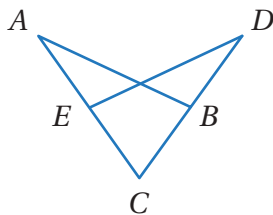


في الشكل المجاور، إذا علمتُ أنَّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $\angle EAD \cong \angle EBC$ ، فأثبتُ أنَّ $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ باستعمال البرهان السهمي.



ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

أتحقق من فهمي:

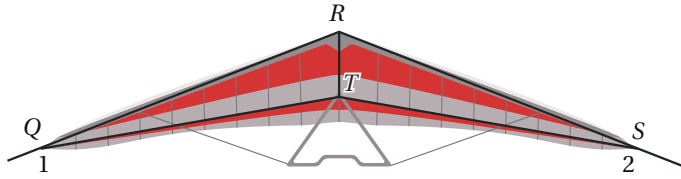


في الشكل المجاور، إذا علمتُ أنَّ $\overline{CA} \parallel \overline{CD}$ ، $\angle ABC \cong \angle DEC$ ، فأثبتُ أنَّ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

تُستعمل المثلثات المتطابقة في كثير من التصميمات؛ لِمَا لَهَا مِنْ أهمية في ضمان دعم الأشياء وتوازنها من حولنا.

الوحدة 4

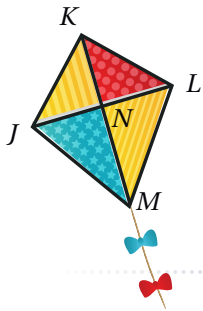
مثال 4: من الحياة



طائرة شراعية: يصمم جناحا الطائرة الشراعية بحيث يبدوان مثلثين متطابقين كما في الشكل المجاور؛ لضمان توازن الطائرة في الجو. إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle RTQ \cong \angle RTS$ ، فأثبت أن $\overline{QT} \cong \overline{ST}$

لأثبت أن $\overline{QT} \cong \overline{ST}$ ، فلا بدّ أولاً إثبات أن $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\angle 1 \cong \angle 2$ (1)
(2) معطى	$\angle RTQ \cong \angle RTS$ (2)
(3) زاويتان متكاملتان مع الزاويتين المتطابقتين $\angle 1$ و $\angle 2$	$\angle RQT \cong \angle RST$ (3)
(4) ضلع مشترك	\overline{RT} (4)
(5) AAS	$\triangle RQT \cong \triangle RST$ (5)
(6) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين	$\overline{QT} \cong \overline{ST}$ (6)



أتحقق من فهمي:

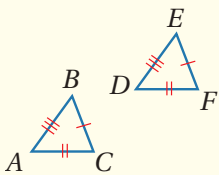
طائرة ورقية: إذا كانت N في الطائرة الورقية المجاورة نقطة منتصف \overline{JL} ، و $\overline{KM} \perp \overline{JL}$ و $\angle KLN \cong \angle KJN$ ، فأثبت أن $\overline{KN} \cong \overline{LN}$

تعلمت طرائق عدة لإثبات تطابق المثلثات يمكن تلخيصها في الجدول الآتي:

إثبات تطابق المثلثات

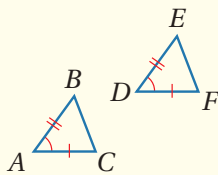
ملخص المفهوم

SSS



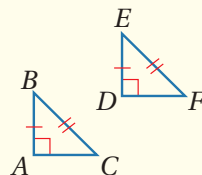
يتطابق مثلثان إذا كانت أضلعهما المتناظرة متطابقة.

SAS



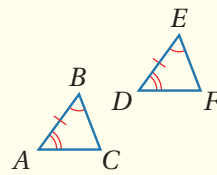
يتطابق مثلثان إذا تطابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر.

HL (مثلثات قائمة الزاوية فقط)



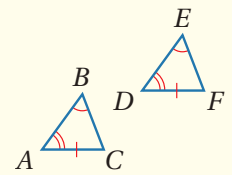
يتطابق مثلثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية وترًا وساقًا في مثلث قائم آخر.

ASA



يتطابق مثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع محصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر.

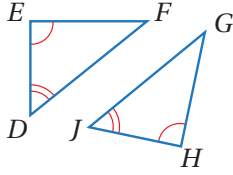
AAS



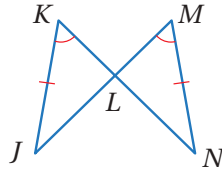
يتطابق مثلثان إذا تطابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر.

أحدّد أنّه يمكن إثبات تطابق كلّ زوجٍ من المثلثات الآتية أم لا، مبررًا إجابتي:

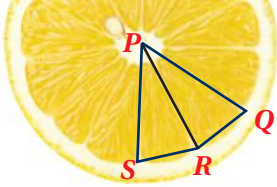
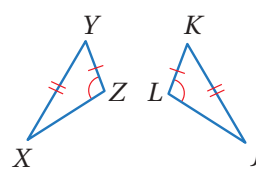
1 $\triangle DEF, \triangle JHG$



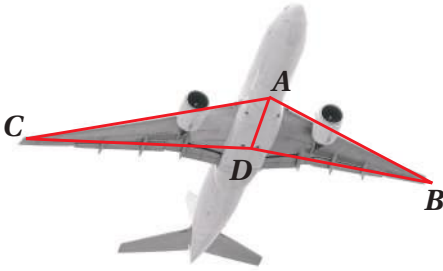
2 $\triangle JKL, \triangle NML$



3 $\triangle XYZ, \triangle JKL$



4 في الشكل المجاور، إذا علمت أن \overline{PR} ينصف $\angle QPS$ ،
و $\angle QRP \cong \angle SRP$ ، فأثبت أن $\triangle QRP \cong \triangle SRP$

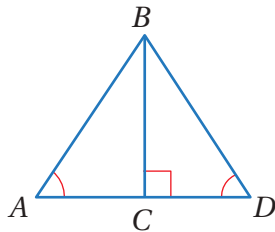


5 في الشكل المجاور، إذا علمت أن
 $\angle ADB \cong \angle ADC$ ، $\overline{DB} \cong \overline{DC}$
 $\angle ABD \cong \angle ACD$ ، فأثبت أن
 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

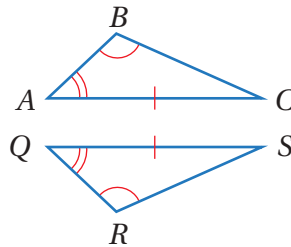
معلومة

يمكن للطائرة أن تحلق لبعض الوقت من دون محركات، وذلك بفضل التصميم الانسيابي والدقيق للأجنحة.

7 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$

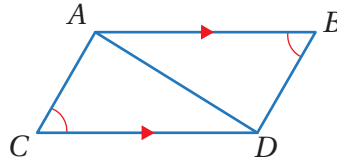


6 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle QRS$

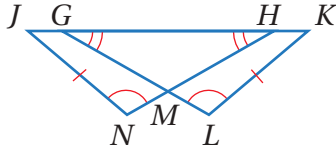


الوحدة 4

8 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي، لكتابة برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{DB}$



9 أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي، لكتابة برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبت أن $\overline{GK} \cong \overline{HJ}$



حديقة: تخطط سالي لزراعة حدائقها مستطيلة الشكل بأنواع مختلفة من الزهور في أربعة أحواضٍ مثلثة الشكل كما في الشكل المجاور. إذا علمت أن F نقطة منتصف \overline{DG} و $\angle CDF \cong \angle FGH$ ، فأثبت أن:



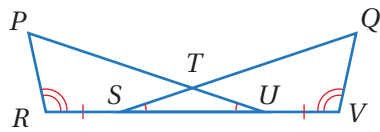
معلومة

تعتمد أجهزة المساحة الحديثة على نظام تحديد المواقع العالمي (GPS)

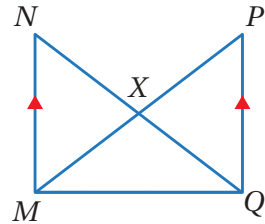
10 $\triangle CFD \cong \triangle HFG$

11 $\overline{CF} \cong \overline{HF}$

12 **نهر:** أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأثبت أن $\overline{AB} \cong \overline{DE}$



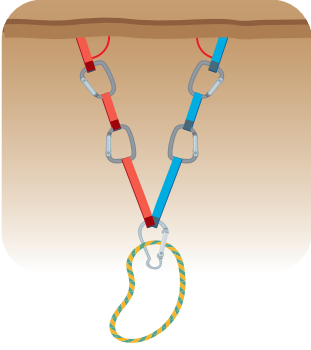
13 **تحذ:** أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لكتابة برهانٍ ذي عمودين؛ لأثبت أن $\triangle PUR \cong \triangle QSV$



14 **تبرير:** هل يمكن إثبات تطابق $\triangle MNQ \cong \triangle QPM$ بالاعتماد على المعلومات المعطاة على الشكل المجاور؟ أبرر إجابتي.

15 **أكتب:** كيف أتحقق من تطابق مثلثين باستعمال زاويتين وضلعٍ محصورٍ بينهما؟

مهارات التفكير العليا



أستكشف

يبين الشكل المجاورُ مرستين باللونين الأحمر والأزرق لهما الطول نفسه، ثبتهما متسلق في شق صخري في أثناء تسلقه أحد الجبال. ما العلاقة بين الزاويتين المكوّنتين بين كل من المرستين والشق الصخري؟

فكرة الدرس

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المصطلحات

الساقان، زاوية الرأس، القاعدة، زاويتا القاعدة، النتيجة.



تعلمت سابقاً أنّ المثلث المتطابق الضلعين هو المثلث الذي فيه ضلعان متطابقان على الأقل.

إنّ لأجزاء المثلث المتطابق الضلعين أسماء خاصة، إذ يسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين** (legs)، وتسمّى الزاوية التي ضلعاها الساقان **زاوية الرأس** (vertex angle)، ويسمّى الضلع الثالث **القاعدة** (base). والزاويتان المكوّنتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تسميان **زاويتي القاعدة** (base angles).

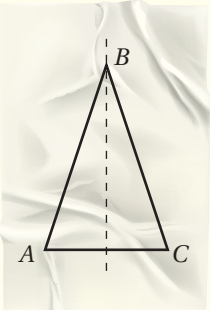
سأستكشف في النشاط الآتي العلاقة بين زاويتي القاعدة والساقين في المثلث المتطابق الضلعين.

المثلث المتطابق الضلعين

نشاط هندسي



الإجراءات:



1 **الخطوة** أرسم المثلث ABC المتطابق الضلعين على ورقة شفافة، كما في الشكل المجاور، حيث $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

2 **الخطوة** أطوي المثلث حول الرأس B بحيث ينطبق الساقان على بعضهما تماماً.

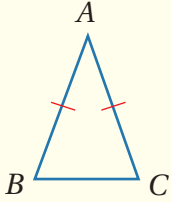
أحلّ النتائج:

- ماذا ألاحظ بالنسبة للزاويتين $\angle A$ و $\angle C$ ؟
- أرسم مثلثاً آخر متطابق الضلعين، وأقارن بين زاويتي القاعدة. ماذا أستنتج؟

يمكنني ملاحظة النظريات الآتية من النشاط الهندسي السابق:

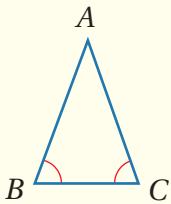
المثلث المتطابق الضلعين

نظريات



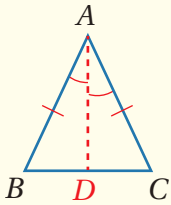
نظرية المثلث المتطابق الضلعين

- **بالكلمات:** إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ فإن $\angle B \cong \angle C$



عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

- **بالكلمات:** إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقتان.
- **بالرموز:** إذا كان $\angle B \cong \angle C$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



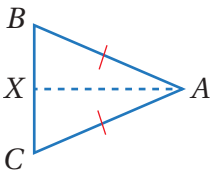
منصف زاوية الرأس

- **بالكلمات:** يكون منصف زاوية الرأس عمودياً على القاعدة، وينصفها.
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ و \overline{AD} ينصف $\angle BAC$ ، فإن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BD}$

مثال 1: إثبات نظرية

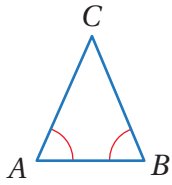


في $\triangle ABC$ ، إذا علمت أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، فأثبت أن $\angle B \cong \angle C$ باستعمال البرهان ذي العمودين.



المبررات	العبارات
(1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.	(1) افرض أن X نقطة منتصف \overline{BC}
(2) كل نقطتين تحددان مستقيماً.	(2) ارسم قطعة مساعدة \overline{AX}
(3) X نقطة منتصف \overline{BC}	(3) $\overline{BX} \cong \overline{CX}$
(4) معطى	(4) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
(5) ضلع مشترك	(5) \overline{AX}
(6) SSS	(6) $\triangle ABX \cong \triangle ACX$
(7) زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين	(7) $\angle B \cong \angle C$

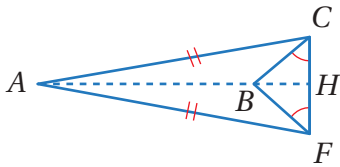
أتحقق من فهمي:



في ΔABC ، إذا علمتُ أن $\angle A \cong \angle B$ ، فأثبتُ أن $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودين.

يمكنني استعمالُ نظرياتِ المثلثِ المتطابقِ الضلعينِ في تحديدِ القطعِ المستقيمةِ المتطابقةِ والزوايا المتطابقةِ في أشكالٍ هندسيةٍ تحتوي مثلثاتٍ متطابقةً الضلعينِ.

مثال 2



1 أسمي زاويتين متطابقتين غير المشارِ إلى تطابقهما في الشكل:

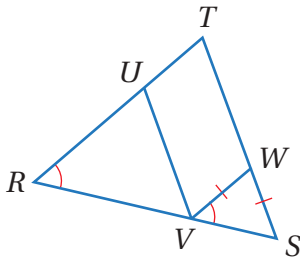
$\angle AFC$ تقابل $\angle ACB$ و $\angle ACF$ تقابل $\angle BCF$ ؛ لذا فإن $\angle AFC \cong \angle ACF$

(نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

2 أسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشارِ إلى تطابقهما في الشكل:

\overline{BC} تقابل \overline{BF} و $\angle BCF$ تقابل $\angle BFC$ ؛ لذا فإن $\overline{BC} \cong \overline{BF}$

(عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)



أتحقق من فهمي:



3 أسمي زاويتين متطابقتين غير المشارِ إلى تطابقهما في الشكل.

4 أسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشارِ إلى تطابقهما في الشكل.

التذكير

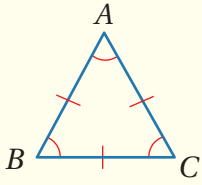
المثلث المتطابق
الأضلاع أضلاعه
الثلاثة متطابقة.

النتيجة (Corollary) هي نظرية يكون برهانها مبنيًا على نظرية أخرى. ويمكن استعمال النتيجة لتبرير خطوات البراهين، أو حل أسئلة ذات علاقة. وفي ما يأتي نتيجتان لنظرية المثلث المتطابق الضلعين، وعكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين:

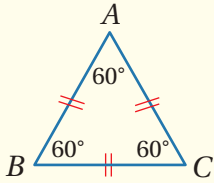
الوحدة 4

المثلث المتطابق الأضلاع

نتيجتان



- **بالكلمات:** يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.
- **بالرموز:** $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ إذا وفقط إذا كان $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$

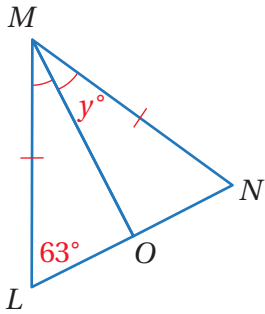


- **بالكلمات:** قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع 60°
- **بالرموز:** إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ فإن $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60^\circ$

يمكن استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 3

1 أجد قيمة y في الشكل المجاور.



- بما أن $\angle NMO \cong \angle LMO$ إذن \overline{MO} منصف لزاوية الرأس في مثلث متطابق الضلعين،
وبذلك فإن $\overline{MO} \perp \overline{LN}$ ، ومنه $m\angle MON = 90^\circ$.
- وبما أن $\triangle MLN$ متطابق الضلعين، فإن $\angle N \cong \angle L$ ، ومنه فإن $m\angle N = 63^\circ$.

$$m\angle N + m\angle MON + y^\circ = 180^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث

$$63^\circ + 90^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle N = 63^\circ, m\angle MON = 90^\circ$$

$$153^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

أجمع

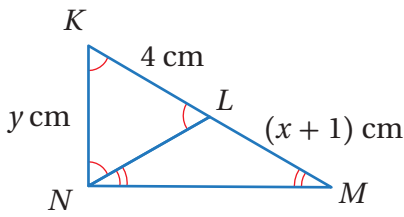
$$y^\circ = 27^\circ$$

أطرح 153° من طرفي المعادلة

إذن، قيمة y تساوي 27°

2

أجد قيمة كل من x و y في الشكل المجاور.



الخطوة 1 أجد قيمة y

بما أن $\angle KNL \cong \angle KLN \cong \angle LKN$ ، فإن $\triangle KLN$ متطابق الأضلاع،
ومنه فإن $y = 4 \text{ cm}$.

الخطوة 2 أجد قيمة x

بما أن $\angle LNM \cong \angle LMN$ ، فإن $\overline{LN} \cong \overline{LM}$ ، ومنه فإن $\triangle LMN$ متطابق الضلعين.
وبما أن $\triangle KLN$ متطابق الأضلاع، فإن $LN = 4$.

$$LN = LM$$

$$4 = x + 1$$

$$x = 3$$

قطعتان مستقيمتان متطابقتان

$$LN = 4, LM = x + 1$$

أطرح 1 من طرفي المعادلة

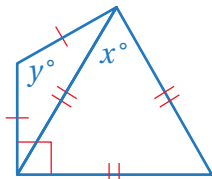
إذن، قيمة x تساوي 3 cm

أتحقق من فهمي:



3

أجد قيمة كل من x و y في الشكل المجاور.



يمكن رؤية المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع في كثير من التصميمات والهياكل والجسور والمباني؛ لما لها من أهمية في دعمها وجعلها أكثر ثباتاً.



مثال 4: من الحياة

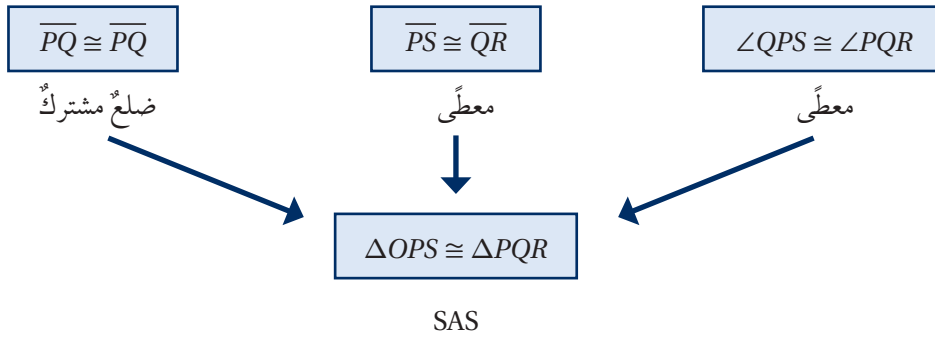


برج المنقذ: في برج المنقذ المجاور، إذا علمت أن $\overline{PS} \cong \overline{QR}$ و $\angle QPS \cong \angle PQR$ ،
فأثبت أن:

$$\triangle QPS \cong \triangle PQR$$

1

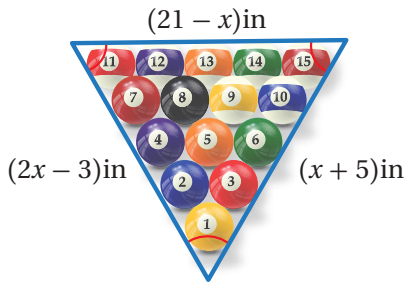
الوحدة 4



2 ΔQPT متطابق الضلعين.

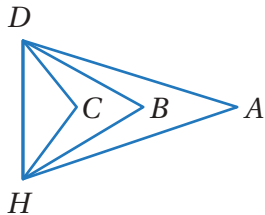
المبررات	العبارات
(1) زاويتان متقابلتان بالرأس.	$\angle PTS \cong \angle QTR$ (1)
(2) زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين.	$\angle PSQ \cong \angle QRP$ (2)
(3) معطى.	$\overline{PS} \cong \overline{QR}$ (3)
(4) AAS	$\Delta QTR \cong \Delta PTS$ (4)
(5) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين.	$\overline{PT} \cong \overline{QT}$ (5)
(6) تعريف المثلث المتطابق الضلعين.	ΔQPT متطابق الضلعين (6)

أتحقق من فهمي:



بلياردو: تُرتَّب كرات البلياردو على شكل مثلث متطابق الأضلاع كما في الشكل المجاور؛ لأنَّ شكل المثلث قادرٌ على نقل الطاقة الحركية من الكرة الأولى في الواجهة إلى غيرها من الكرات، فتتحرك كلها من ضربة واحدة. أجد قيمة المتغير x .

أدرب وأحل المسائل

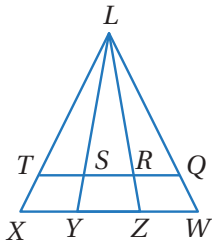


باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان $\overline{AD} \cong \overline{AH}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

2 إذا كان $\angle BDH \cong \angle BHD$ ، فأسمي قطعتين

مستقيمتين متطابقتين.



باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة الآتية:

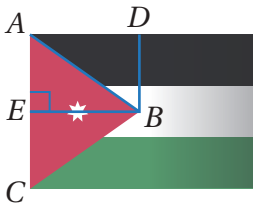
3 إذا كان $\overline{LT} \cong \overline{LQ}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

4 إذا كان $\overline{LX} \cong \overline{LW}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

5 إذا كان $\overline{LY} \cong \overline{LZ}$ ، فأسمي زاويتين متطابقتين.

6 إذا كان $\angle LXW \cong \angle LWX$ ، فأسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

7 إذا كان $\angle LSR \cong \angle LRS$ ، فأسمي قطعتين مستقيمتين متطابقتين.



8 العلم الأردني: العلم الأردني مستطيل طوله مثلاً عرضه،

فيه مثلث متطابق الضلعين لونه أحمر، وارتفاع المثلث \overline{BE}

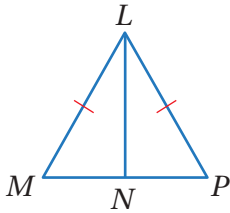
يساوي نصف طول العلم. أثبت أن $\triangle DAB \cong \triangle EBA$

10 في الشكل الآتي، إذا علمت أن $\triangle MLP$

متطابق الضلعين، و N نقطة منتصف

\overline{MP} ، فأكتب برهاناً سهماً؛ لإثبات أن

$$\overline{LN} \perp \overline{MP}$$

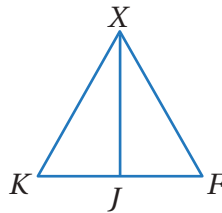


في الشكل الآتي، إذا علمت أن $\triangle XKF$

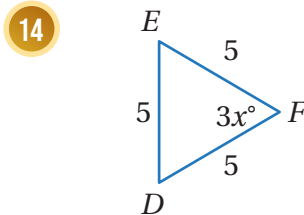
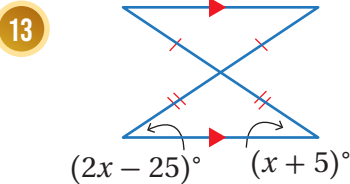
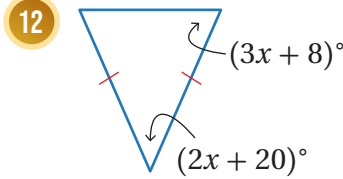
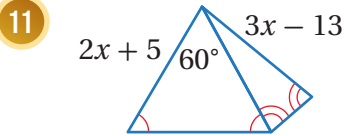
متطابق الأضلاع، و \overline{XJ} ينصف $\angle X$ ،

فأكتب برهاناً ذا عمودين؛ لإثبات أن J

نقطة منتصف \overline{KF} .



أجد قيمة x في كل مما يأتي:



أنعلم

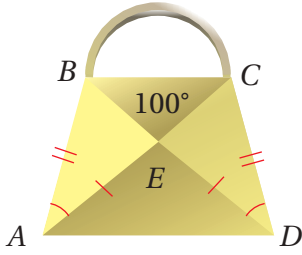
يمثل المثلث الأحمر في العلم الأردني السلالة الهاشمية.

أتذكر

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

الوحدة 4

حقيقية: يبيّن الشكل المجاور تصميمًا لحقيبة فُماشية:



أثبت أن $\triangle ABE \cong \triangle DCE$

أسمّي المثلثات المتطابقة الضلعين في الحقيقية.

أسمّي ثلاث زوايا تتطابق مع $\angle EAD$

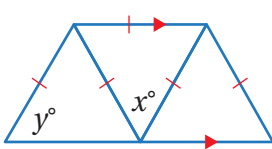
15

16

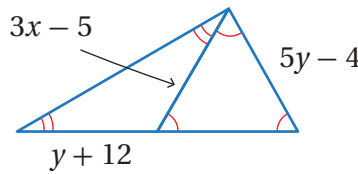
17

أجد قيمة x و y في كلِّ ممّا يأتي:

18



19



أتذكّر

مجموع قياسات الزوايا على مستقيم يساوي 180°

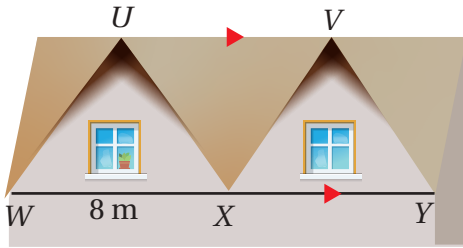
مهارات التفكير العليا

تبرير: يبيّن الشكل المجاور الواجهة

الأمامية لمنزل على شكل مثلثين

متطابقين الضلعين رأساهما U و V

حيث $\triangle WUX \cong \triangle XVY$:



أسمّي زاويتين متطابقتين مع $\angle WUX$ ، مبررًا إجابتي.

أجد المسافة بين الرأسين U و V ، مبررًا إجابتي.

إرشاد

أبدأ بإيجاد قياسات الزوايا من المثلث الداخلي FCG

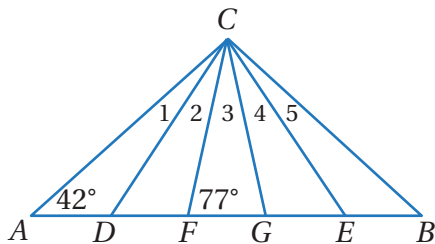
تحذّر: في الشكل المجاور، إذا علمت أن

$\triangle ABC$ متطابق الضلعين، و $\triangle DCE$

متطابق الأضلاع، و $\triangle FCG$ متطابق

الضلعين، فأجد قياسات الزوايا

1 و 2 و 3 و 4 و 5.



20

21

22

كيف أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتطابق الأضلاع 60° ؟ **أكتب**

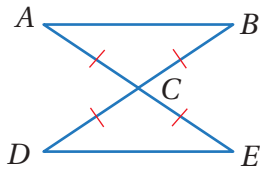
23

اختبار الوحدة

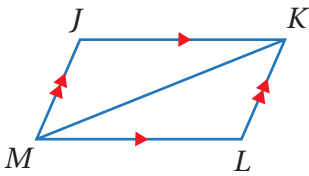
5 إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ ، وكان $m\angle A = 47.1^\circ$ و $m\angle C = 13.8^\circ$ ، فإن $m\angle Y$ يساوي:

- a) 13.8° b) 76.2°
c) 60.9° d) 119.1°

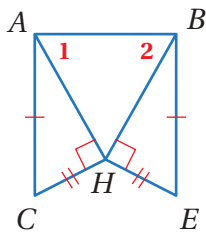
6 أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل الآتي لكتابة برهانٍ سهميٍّ؛ لاثبت أن $\Delta ABC \cong \Delta EDC$



7 أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل المجاور لكتابة برهانٍ ذي عمودينٍ؛ لاثبت أن $\Delta MJK \cong \Delta KLM$



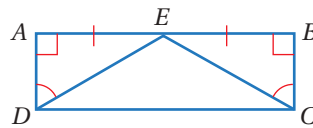
8 أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل الآتي؛ لاثبت أن $\angle 1 \cong \angle 2$



1 أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

2 إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ فأَيُّ الجمل الآتية صحيحة؟

- a) $\overline{BC} \cong \overline{ZX}$ b) $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$
c) $\overline{AB} \cong \overline{YZ}$ d) $\overline{AC} \cong \overline{XY}$

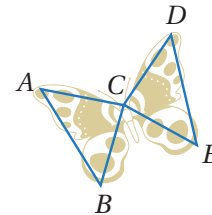


3 بناءً على المعلومات المعطاة على الشكل المجاور، أيُّ مما يأتي تُستعمل لإثبات أن $\Delta ADE \cong \Delta BCE$ ؟

- a) SAS b) ASA c) AAS d) HL

4 في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ و $\overline{QR} \cong \overline{RS}$ ، و $m\angle PRS = 72^\circ$ ، فما قياس $\angle QPS$ ؟

- a) 27° b) 54° c) 63° d) 72°

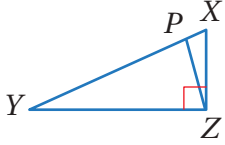


5 تبدو أجنحة بعض الفراشات على شكل مثلثات متطابقة كما في الشكل المجاور. إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{DC}$

و $\angle ACB \cong \angle ECD$ ، فما العبارة الإضافية التي أحتاج إليها؛ لاثبت أن $\Delta ACB \cong \Delta ECD$ ؟

- a) $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ b) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$
c) $\angle BAC \cong \angle CED$ d) $\angle ABC \cong \angle CDE$

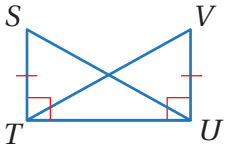
تدريب على الاختبارات الدولية



13 في الشكل المجاور
في $\triangle XZY$ قائم الزاوية،
فيه $\overline{YP} \cong \overline{YZ}$

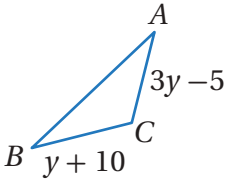
$m\angle PYZ = 26^\circ$ ، ما قياس $\angle XZP$ ؟

- a) 13° b) 26° c) 32° d) 64°



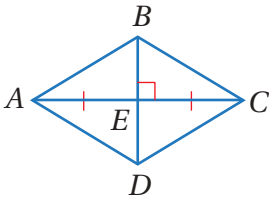
14 أي النظريات أو المسلمات
يمكن بها إثبات تطابق
 $\triangle VUT$ و $\triangle STU$ ؟

- a) ASA b) HL c) SSS d) SAS



15 قيمة y بالوحدات التي
تجعل $\triangle ABC$ المجاور
متطابق الضلعين تساوي:

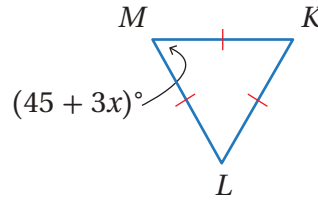
- a) $1\frac{1}{4}$ b) $7\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{2}$ d) $15\frac{1}{2}$



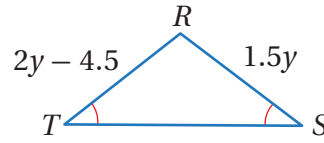
16 أي جمل التطابق
الآتية يمكن إثباتها
بالمعلومات المعطاة
في الشكل المجاور؟

- a) $\triangle AEB \cong \triangle CED$ b) $\triangle ABD \cong \triangle BCA$
c) $\triangle BAC \cong \triangle DAC$ d) $\triangle DEC \cong \triangle DEA$

أجد قيمة المتغير في كل من الأشكال الآتية:



9

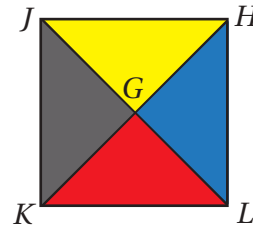


10

11 في الشكل الآتي، إذا علمت أن

$GJ = GH = GL = GK$ ، فأثبت أن

$$\triangle JGK \cong \triangle LGH$$



12 في الشكل الآتي، إذا علمت أن \overline{DF} ينصف $\angle CDE$ ،

و $\overline{CE} \perp \overline{DF}$ ، فأكتب برهاناً سهماً؛ لأثبت أن

$$\triangle DGC \cong \triangle DGE$$

