ARITHMÉTQIUES

Rattrapage 2024 : 3pts

1 En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, \ldots, 22\}$ tel que:

$$10u \equiv 1 \mod 23$$

2- Soient m un entier naturel et q et r, respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10.

(a) Montrer que: $m \equiv 10(q + ur) \mod 23$

(b) Montrer que: 23 divise $m \Leftrightarrow$ 23 divise $(q + ur)$

2 On considère dans $\mathbb{N}$ le système (S):

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 23 \\ x \equiv 2 \mod 10 \end{cases}$$

(a) Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q + 2$ et 23 divise $(q + 7)$

(b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S)

Normale 2024 : 3pts

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

1 (a) Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$

(b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$

(c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x = 3$ [221] (On donne : $221 = 13$
$times 17$)

Rattrapage 2023 : 3pts

Soit p un nombre premier impair. On pose : $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{p-1}$ Soit q un nombre premier qui divise S.

1 (a) Montrer que p et q sont premiers entre eux.

(b) En déduire que : $p^{q-1} \equiv 1[q]$

(c) Vérifier que : $p^p - 1 = (p-1)S$.

(d) En déduire que : $p^p \equiv 1[q]$

2. On suppose que p et $q-1$ sont premiers entre eux.
   a. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p \equiv 1[q]$
   b. En déduire que $S \equiv 1[q]$
3. Montrer que : $q \equiv 1[p]$

Normale 2023 : 3pts

Soit p un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^2 \equiv 2[p]$.

1. a. Montrer que: $2^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$
   b. En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$.
   (On remarque que : $\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right) = 2^{p-1}-1$)
2. Soit x une solution de l'équation (E)
   a. Montrer que p et x sont premiers entre eux.
   b. En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)
   c. Montrer que pour tout $k \in \{1,2,\dots,p-1\}$, p divise C_p^k.
   (On rappelle que : $(\forall k \in \{1,2,\dots,p-1\}) \quad C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)
3. a. En utilisant la formule de Moivre, montrer que :
   $$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$
   (i étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$)
   b. On admet que : $(1+i)^p = \sum\limits_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i\sum\limits_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$.
   Montrer que :
   $$2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z} \quad \text{et } 2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p]$$
   (on pourra utiliser la question3-)
4. En déduire que si $p \equiv 5[8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

Rattrapage 2022 : 3pts

1. Montrer que 137 est un nombre premier.
2. Déterminer un couple (u,v) de Z^2 tel que, $38u + 136v = 2$
3. Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que, $\quad x^{38} \equiv 1 \quad [137]$.
   a. Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.
   b. Montrer que , $x^{136} \equiv 1[137]$
   c. Montrer que , $x^2 \equiv 1[137]$

4 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{19} \equiv 1[137]$

Normale 2022 : 3pts

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.
On considere dans N^2 l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$.
Soit(x,y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n

1 (a) Montrer que , $(x+1)^n \equiv x^n[p]$

(b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

(c) En deduire que, $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}[p]$

2 Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

3 On suppose que n est impair.

(a) Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que, $nu+(p-1)v=1$ (On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

(b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que, $nr = 1-(p-1)(v+nq)$

(c) On pose, $v' = -(v+nq)$. Montrer que, $v' \geq 0$

(d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Normal 2021 : 4pts

♣ PARTIE I: On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x-43y=1$

1 Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E)

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. l'équation (E).

♣ PARTIE II: On considère dans Z l'équation (F) : $x^{41}=4[43]$

1 Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F).

(a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que: $x^{42}=1[43]$

(b) Montrer que: $4x=1 \quad [43]$, en déduire que: $x=11$ [43]

2 Donner l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (F).

♣ PARTIE II: On considère dans Z le système à deux équations suivant (S) :

$$\begin{cases} x^{41} = 4[43] \\ x^{47} = 10[47] \end{cases}$$

1 Soit x une solution du système (S)

(a) Montrer que x est solution du système (S') :

$$\begin{cases} x = 11[43] \\ x = 10[47] \end{cases}$$

(b) En déduire que: $x=527$ [2021] (On pourra utiliser la partie I)

2 Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S)

Rattrapage 2021 : 4pts

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$.
Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1 ⓐ Montrer que $a^7 \equiv 1[p]$, cn déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; a^{7n} \equiv 1[p]$

ⓑ Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que : $\forall m \in \mathbb{N}; \quad a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

2 On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$

ⓐ Montrer que : $a \equiv 1[p]$

ⓑ En déduire que : $p = 7$

3 Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A alors: $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$

Normal 2020 : 2pts

Soit l'équation : (D): $7x^3 - 13y = 5; (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1 Soit (x, y) une solution de (D)

ⓐ Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

ⓑ En déduire que $x^{12} = 1$ [13].

ⓒ Montrer que : $x^3 \equiv 10[13]$.

ⓓ En déduire que : $x^{12} = 3\{13\,|$.

2 Déduire dés questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Rattrapage 2020 : 2.5pts

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant :

$$9^{p+q-1} \equiv 1[pq] \quad \text{et} \quad p < q$$

1 ⓐ Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

ⓑ En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et $9^q \equiv 1[p]$.

2 ⓐ Montrer que $(p-1)$ et q sont premiers entre eux.

ⓑ En utilisant le théorème de Bézout, Montrer que : $p = 2$.

ⓒ En utilitsant le théorème de Fermat, Montrer que : $9^{q-1} \equiv 1[q]$.

ⓓ En déduire que $q = 5$.

Normal 2019 : 3pts

On admet que 2969 (l'année Amazighe actuelle) est un nombre premier. Soient n et m deux entiers naturels vérifiant: $\quad n^8 + m^8 = 0 \quad [2969]$

1 On suppose que 2969 ne divise pas n.

ⓐ En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in Z) : u \times n \equiv 1[2969]$.

ⓑ En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1[2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]$. (On remarque

que : $2968 = 8 \times 371$)

ⓒ Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

ⓓ En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]$.

2 ⓐ En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

ⓑ Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0[2969]$

Normal 2018 : 3pts

Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k\,(k \in \mathbb{N}^*)$

1 Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

2 Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5} \equiv 1[p]$

ⓐ Montrer que x et p sont premiers entre eux.

ⓑ Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

ⓒ Vérifier que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$.

ⓓ En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$.

3 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l' équation : $x^{62} \equiv 1[67]$.

Normal 2017: 3pts

On admet que 2017 est premier et que $2016 = 2^5.3^2.7$ et soit p un nombre premier tel que $p \geqslant 5$

1 Soit (x,y) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$

ⓐ Vérifier que $p < 2017$.

ⓑ Montrer que p ne divise pas y.

ⓒ Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016 .

ⓓ Montrer que $p = 7$.

2 Déterminer suivant les valeurs de p, les couples (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$.

Normal 2016: 3pts

♣ PARTIE I: Soit (a,b) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$

1 Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171}[173].(171 = 3 \times 57)$.

2 Montrer que $173 \mid a$ si et seulement si $173 \mid b$.

3 On suppose que $173 \mid a$. Montrer que $173 \mid a + b$. 1

4 On suppose que 173 ne divise pas a.

ⓐ En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $a^{172} \equiv b^{172}[173]$.

ⓑ Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$.

ⓒ En déduire que : $173 \mid a+b$.

♣ PARTIE I: On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante $(E) : x^3+y^3 = 173(xy+1)$. Soit (x,y) une solution de l'équation (E). On pose : $x^3+y^3 = 173k$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy = 1$.
2. Montrer que : $k=1$, puis résoudre l'équation (E).

Normal 2015: 3pts

Soit x un entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$.

1. Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.
2. Soit d un diviseur commun de x et 2015 .
   - ⓐ Montrer que d divise 1436 .
   - ⓑ En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.
3. ⓐ En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $x^{1440} \equiv 1[5], x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$.(Remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$).
   - ⓑ Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis en déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.
4. Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$.

Rattrapage 2015 (Extrait): 3pts

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016} \equiv 1[13]$.
2. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{2015} \equiv 2[13]$ et soit x une solution de (E).
   - ⓐ Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
   - ⓑ Montrer que : $x \equiv 7[13]$.
3. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{7+13k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Normal 2014: 3pts

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \underbrace{\overline{333...331}}_{n \text{ fois le chiffre } 3}$

1. Vérifier que a_1 et a_2 sont premiers.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3a_n+7 = 10^{n+1}$.
3. Montrer que Pour tout k de $\mathbb{N}, 10^{30k+2} \equiv 7[31]$.
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, a_{30k+1} \equiv 0[31]$ puis en déduire que $31 \mid a_{30k+1}$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Rattrapage 2014: 1pts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $b_n = 2.10^n + 1$ et $c_n = 2.10^n - 1$.

1. Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ puis en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. Trouver un couple (x_n, y_n) de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $b_n x_n + c_n y_n = 1$.

Normal 2013: 3pt

On cherche les entiers naturels n supérieurs strictement à 1 , vérifiant la relation : $(R) : 3^n - 2^n \equiv 0[n]$

1. On suppose que n vérifie la relation (R) et soit p le plus petit diviseur positif premier de n.
   - a) Montrer que $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ et en déduire que $p \geqslant 5$.
   - b) Montrer que $3^{p-1} \equiv 1[p]$ et $2^{p-1} \equiv 1[p]$.
   - c) Montrer que $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$
   - d) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par $p-1$. ($a = q(p-1) + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < p-1$). Montrer que : $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $rn = 1 + k(p-1)$.

2. En déduire qu'il n'existe aucun entier naturel ≥ 2 vérifiant la relation (R).

Normal 2012: 3pt

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$.

1. - a) a. Déterminer $195 \wedge 143$, puis en déduire que (E) admet des solutions.
   - b) Sachant que $(-1,-1)$ est une solution de (E), résoudre (E) en précisant les étapes de la résolution.

2. Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $n^{4k} \equiv 1[5]$

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x \equiv y[4]$.

4. - a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*, n^x \equiv n^y[5]$.
   - b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*, n^x \equiv n^y[10]$.

5. Soit$(x,y) \in \mathbb{N}^2$ solution de (E). Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre d'unités dans la base décimale.

Rattrapage 2012: 3pt

1. - a) Vérifier que 503 est nombre premier.
   - b) Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$, puis en déduire que : $7^{2008} \equiv 1[503]$

2. On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E) : 49x - 6y = 1$. Sachant que le couple $(1,8)$ est une solution de (E), résoudre (E) en précisant les étapes de la résolution.

3. On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2007}$
   - a) Vérifier que le couple $\left(7^{2006}, N\right)$ est une solution de l'équation (E).
   - b) Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

ⓒ En déduire que N est divisible par 2012 .

Rattrapage 2011: 3pt

Soit x un entier naturel vérifiant $10^x \equiv 2[19]$.

1 ⓐ Vérifier que $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

ⓑ Montrer que le nombre $10^{18} \equiv 1[19]$.

2 Soit d le pgcd de 18 et $x+1$.

ⓐ Montrer que $10^d \equiv 1[19]$

ⓑ Montrer que $d = 18$. En déduire que $x \equiv 17[18]$

Normal 2011: 3pt

Soit N l'entier naturel représenté dans la base décimale par $N = \underbrace{\overline{111\ldots11}}_{2010 \text{ fois}}$.

1 Montrer que N est divisible par 11 .

2 ⓐ Vérifier que 2011 est premier et que $10^{2010} - 1 = 9N$.

ⓑ Montrer que le nombre 2011 divise $9N$.

ⓒ En déduire que le nombre 2011 divise N.

3 Montrer que le nombre N divise 22121 .

Normal 2010: 3pt

1 Déterminer les entiers relatifs m vérifiant $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

2 Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et soit n un entier naturel tel que $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

ⓐ Vérifier que $\left(n^2\right)^{2k+1} \equiv -1[p]$.

ⓑ Montrer que n et p sont premiers entre eux.

ⓒ En déduire que $\left(n^2\right)^{2k+1} \equiv 1[p]$.

ⓓ Déduire qu'il n'existe aucun entier naturel n vérifiant $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

Normal 2009: 3pt

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1 ⓐ Vérifier que a_n est pair pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

ⓑ Déterminer les valeurs de n pour que $a_n \equiv 0[3]$ tel que p > 3

2 Soit p un nombre premier tel que $p > 3$.

ⓐ Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p], 3^{p-1} \equiv 1[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1[p]$.

ⓑ Montrer que : p divise a_{p-2}.

ⓒ Montrer pour tout q un nombre naturel premier , il existe un entier naturel non nul n tel que $a_n \wedge q = q$

Normal 2008: 3pt

♣ PARTIE I: On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 35u - 96v = 1$ -1 0

1. Vérifier que le couple $(11, 4)$ est une solution de (E) 0
2. En déduire l'ensemble de solutions de (E).

♣ On considère l'équation dans $\mathbb{N}(F) : x^{35} \equiv 2[97]$.

1. Soit x une solution de (F).
   - ⓐ Montrer que 97 est premier et que les nombres x et 97 sont premiers entre eux
   - ⓑ Montrer que : $x^{96} \equiv 1[97]$
   - ⓒ Montrer que $x \equiv 2^{11}[97]$.
2. Montrer que si $x \equiv 2^{11}[97]$ alors x est solution de (F).
3. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est $S = \{11 + 97k / k \in \mathbb{N}\}$.

Rattrapage 2007: 3pt

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système : $(S) \begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ où a, b, p et q sont des entiers relatifs tel que: $p \wedge q = 1$.

1. ⓐ Montrer que $\exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 / pu_0 + qv_0 = 1$.
   ⓑ Montrer que $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ est solution de (S).
2. Soit x une solution de (S). Montrer que le nombre pq divise $x - x_0$.
3. Soit x un entier relatif tel que pq divise $x - x_0$. Montrer que x est solution de (S).
4. En déduire l'ensemble de solutions de x.
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $(S) \begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

Normal 2007: 3pt

Soit :
$$(E) : 195x - 232y = 1;\ \text{où } (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$
.

1. ⓐ Déterminer le plus grand commun diviseur de 232 et 195.
   ⓑ Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est donné par :
$$S = \left\{(163 + 232k; 137 + 195k)\varepsilon\mathbb{Z}^2; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ⓒ Déterminer l'entier naturel d qui vérifie les conditions suivantes:

$$195d \equiv 1[232] \quad ; \quad 0 \leq d \leq 232$$

2 Prouver que l'entier naturel 233 est un nombre premier.

3 Soit : $A = \{n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq n \leq 232\} = [[0;232]]$. Et soit l'application définie ainsi :

$$f : \begin{matrix} A \mapsto A \\ \mapsto \quad f(a) \end{matrix}$$

Avec $f(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{195} par 233 .

ⓐ Montrer que l'application f est injective.

ⓑ Montrer que l'application f est surjective.

ⓒ En déduire que l'application f est une bijection puis donner f^{-1}.

Normal 2006: 3pt

Soit l'équation:

$$(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2; \quad (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

. Et soit (x,y) solution de l'équation (E). On pose : $d = x \wedge y \quad ; \quad x = ad \quad ; \quad y = bd$.

1 ⓐ Vérifier que $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

ⓑ En déduire que : $b = 1$.

ⓒ Montrer que $a \neq 1$ et que le nombre $(a-1)$ divise $(a+1)$.

ⓓ En déduire que : oubien $a = 2$, oubien $a = 3$.

2 Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

Rattrapage 2005: 2.5pt

Soit $\overline{abc}(x)$ la représentation du nombre abc dans le système de numération à base x. Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) : (x+1)^2 = 9+5y$.

1 ⓐ Montrer que : (x,y) est solution de$(E) \Rightarrow x \equiv 2[5]$ ou $x \equiv 1[5]$.

ⓑ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

2 Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{Z}); \left(5k^2+4k-1\right) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$.

3 Résoudre dans $\mathbb{N}^{2*}$ le système suivant : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}(y) \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

Normal 2005: 3.5pt

♣ Soit p un entier naturel premier supérieur ou égal à 5 .

1 Montrer que : $p^2 \equiv 1[3]$.

2 ⓐ Montrer que : $\exists q \varepsilon \mathbb{N}^*; p^2-1=4q(q+1)$.

ⓑ En déduire que : $p^2 \equiv 1[8]$.

3 Montrer que : $p^2 \equiv 1[24]$.

♣♣ Soit $a \in \mathbb{N}^*; a \wedge 24 = 1$;

1 Montrer que : $a^2 \equiv 1[24]$.

2 Étudier la véracité (Proposition vrai ou fausse) du prédicat suivant :

$$\exists (a_1, \cdots, a_{23}) \in \mathbb{N}_*^{23}; \quad a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{23}^2 = 23997; \text{ avec } \begin{cases} \forall k \in \{1,2,\cdots,23\} \\ a_k \wedge 24 = 1 \end{cases}$$

Rattrapage 2004: 3pt

1 Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $(E) : 3x-2y=1$.

2 ⓐ Montrer que le couple $(14n+3; 21n+4)$ est une solution de l'équation (E); avec $n \in \mathbb{N}$.

ⓑ En déduire que les nombres $(21n+4)$ et $(14n+3)$ sont premiers entre eux.

3 ⓐ Soit: $d = (21n+4) \wedge (2n+1)$, Montrer que : $d=1$ oubien $d=13$.

ⓑ Montrer l'équivalence suivante : $d=13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$.

4 On pose : $(\forall n \geq 2); A = 21n^2-17n-4$ et $B = 28n^3-8n^2-17n-3$.

ⓐ Montrer que les nombres A et B sont divisibles par $(n-1)$.

ⓑ Déterminer en fonction de n le $PGCD(A,B)$.

Normal 2004: 3pt

Soit n un entier naturel.

1 ⓐ Montrer l'implication suivante : n impair $\Rightarrow n^2 \equiv 1[8]$.

ⓑ Montrer l'implication suivante : n pair $\Rightarrow n^2 \equiv 4[8]$ ou $n^2 \equiv 0[8]$.

2 ⓐ Prouver : a,b,c impairs $\Rightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)$ n'est pas un carré parfait.

ⓑ Montrer que : a,b,c impairs $\Rightarrow 2(ab+bc+ac) \equiv 6[8]$. On pourra remarquer : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

ⓒ Prouver que a,b,c impairs $\Rightarrow 2(ab+bc+ac)$ n'est pas un carré parfait

ⓓ Prouver : a,b,c impairs $\Rightarrow (ab+bc+ac)$ n'est pas un carré parfait.

Normal 2003: 3pt

Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante:

$$(E) : \quad x^2\left(x^2+7\right) = y(2x+y)$$

1 Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $\delta = PGCD(x,y)$. On pose : $x = \delta a$ et $y = \delta b$. On suppose que le couple (x,y) est une solution de l'équation (E).

(a) Vérifier que: $a^2\left(\delta^2 a^2+7\right)=b(2a+b)$.

(b) En déduire l'existence d'un entier naturel k tel que :

$$2a+b=ka^2 \quad \text{et} \quad \delta^2 a^2+7=kb$$

(c) En déduire que : $a=1$.

(d) En déduire que: $(b+1)^2=\delta^2+8$.

2 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).