Guía de la exposición

Grupo Tinerflecta

Aula Cultural Matemática Divulgativa de la ULL

La Exposición

Los teselados son construcciones planas o espaciales (en el caso 3D se les denomina también empaquetamientos) que hacen referencia a un patrón determinado por una o varias figuras que recubren el plano o el espacio. Estas construcciones deben cumplir dos requisitos: cubrir el plano o el espacio sin dejar huecos y no superponer piezas.

A lo largo de la historia, los teselados han sido fuente de inspiración para decorar palacios, jardines, suelos… Un ejemplo muy significativo son los teselados de la Alhambra de Granada.

Resulta apasionante observar cómo las teorías que permiten explicar los patrones que generan los teselados se complementan con el proceso creativo y el pensamiento libre para convertir al teselado en una obra artística única que sigue ciertas reglas matemáticas. Este es también el caso, por ejemplo, de los teselados de animales del artista neerlandés M. C. Escher.

El interés de los y las matemáticas por los teselados se remonta a tiempos de Arquímedes, en el siglo III a. C., que ya desarrolló un estudio acerca de los polígonos regulares que pueden cubrir el plano. Otros matemáticos como Johannes Kepler, Camille Jordan, el cristalógrafo Evgenii Konstantinovitch Fiodorov o la psicóloga Camila Rial estudiaron las simetrías del plano e iniciaron así el análisis sistemático y profundo de estos objetos.

La técnica del origami (también denominado papiroflexia) es el arte de plegado del papel para generar hermosas obras de arte, bellas esculturas de este material. Su origen se localiza en China alrededor del siglo I o II d.C., con su llegada posterior a Japón.

En lo que respecta a nuestro país, fue el escritor Miguel de Unamuno quien propulsó el origami en la década de 1930.

La técnica de la papiroflexia se ha popularizado y en estos últimos años, con la llegada de los ordenadores y nuevos software de diseño, se han podido generar figuras más complejas.

En Tenerife, el grupo Tinerflecta (integrado por 9 mujeres) ha desarrollado en estos últimos años algunos talleres y exposiciones. Ellas han plegado las figuras de esta exposición que corresponden a conocidas autoras y autores del origami.

La propuesta que aquí hacemos trata de mostrar el mundo de los teselados del plano y del espacio a través de la belleza que proporciona la papiroflexia. La exposición está concebida para resaltar la manera de generar objetos complejos a partir de módulos simples. De alguna manera los teselados del plano y el espacio reflejan la estructura del pensamiento matemático: con unos simples axiomas uno encaja una compleja estructura que genera la teoría global.

Los objetos que mostramos reproducen patrones preestablecidos, pero no de cualquier forma. Es preciso analizar qué tipo de figuras nos permiten teselar trozos del plano y del espacio.

Esperamos que aprecien y disfruten de la belleza de estos objetos y cómo la suma de las *partes* en la posición adecuada puede lograr completar el *total*. Al final resulta ser una enseñanza de vida.

Teselados 2D

01 Teselados 2D: Polígonos regulares

¿Qué polígonos regulares teselan el plano?

La palabra teselado hacen referencia a una regularidad de figuras que recubren una super<icie plana cumpliendo dos requisitos:

- Que no queden huecos entre las figuras.
- Que las figuras no se superpongan.

Los teselados se crean con copias idénticas de una o diversas piezas planas que se llama teselas.

Los testados regulares son aquellos construidos con solo un tipo de polígono regular.

Johannes Kepler probó que los únicos polígonos regulares que pueden cubrir el plano son el triángulo, el cuadrado y el hexágono.

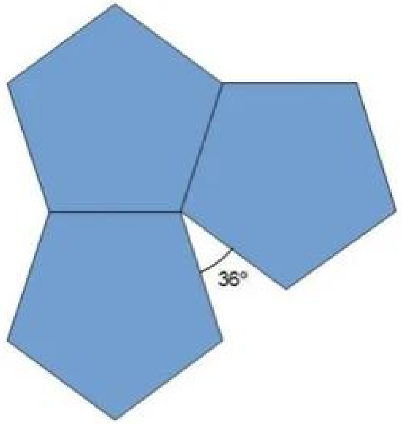
El Teorema del panal de abejas

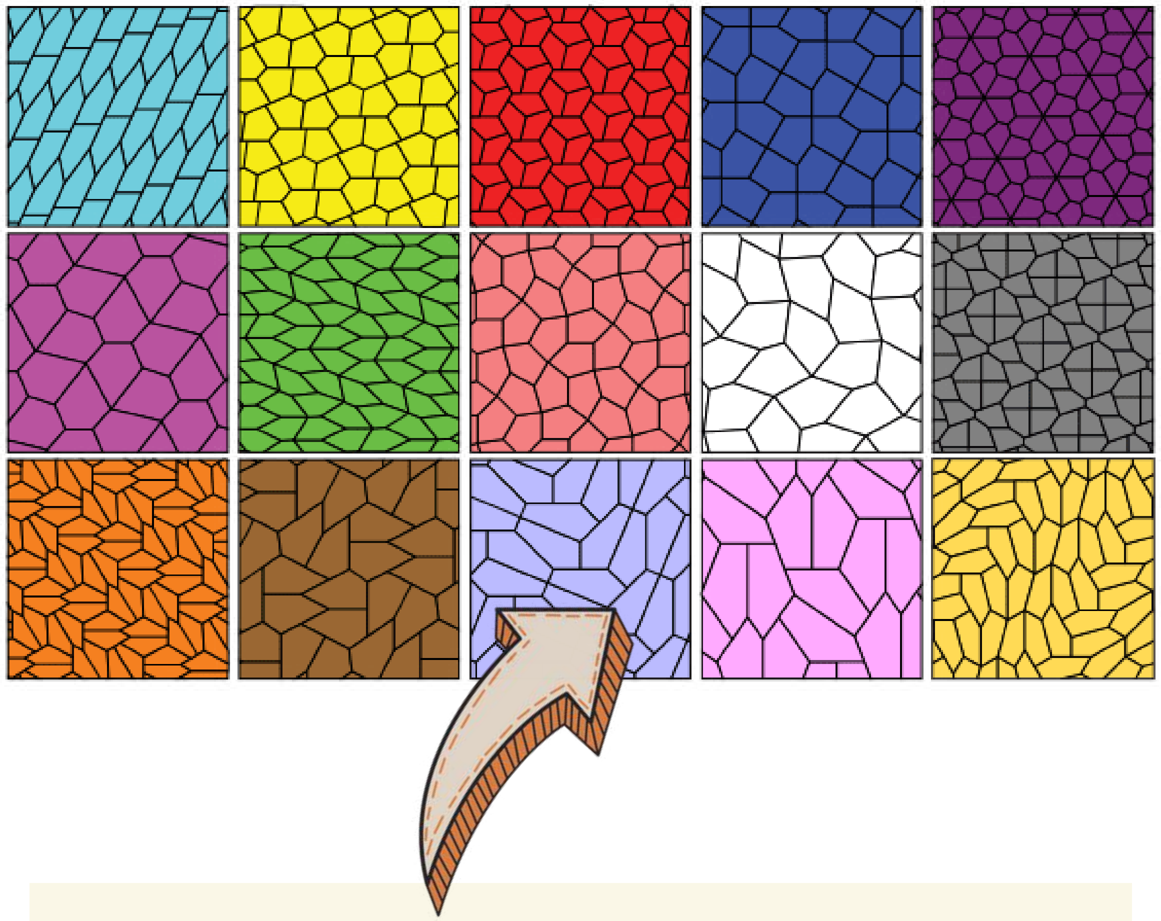
Un teselado con hexágonos es la mejor manera de dividir el plano en regiones de igual área y con el mínimo perímetro total (1999, Thomas Callister Hales)

02 Teselados 2D con pentágonos

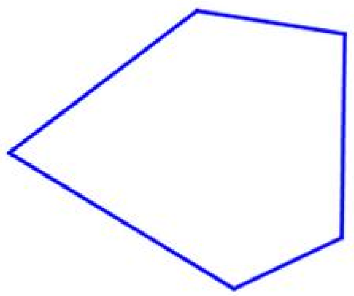
¿Por qué un pentágono regular no tesela el plano?

Su ángulo interno es de 108º. Si colocamos pentágonos regulares alrededor de un vértice, solo pueden disponerse tres que abarcan 324º, pero queda un espacio que no se cubre con un pentágono más.

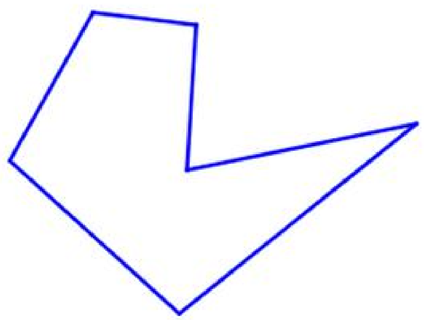




CONVEXO



NO CONVEXO

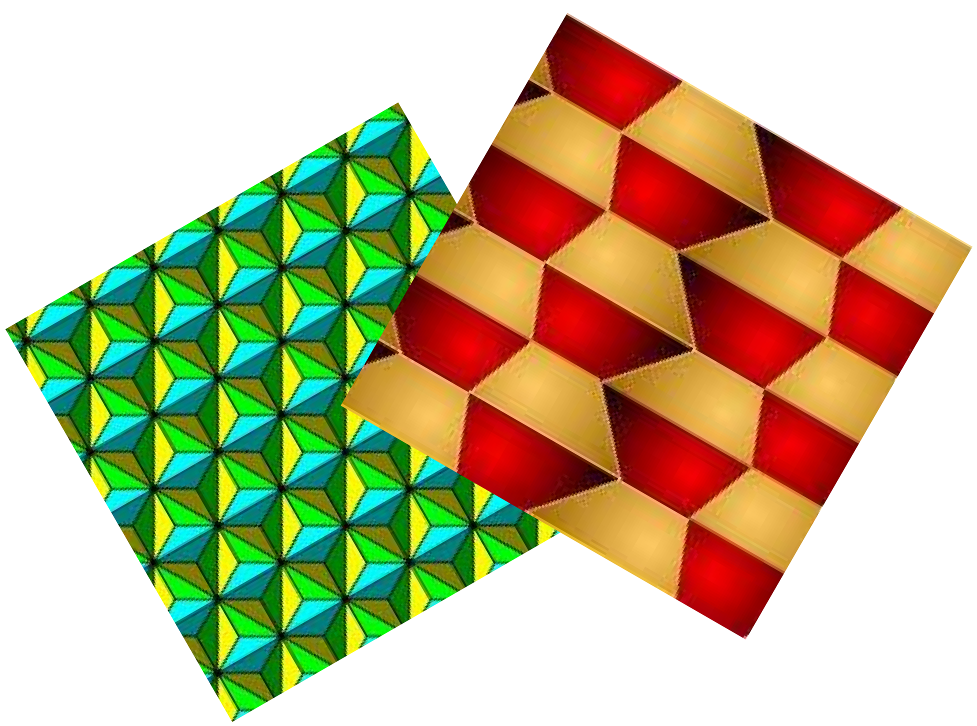


Existen solo 15 pentágonos convexos irregulares que teselan el plano

03 Teselados 2D semirregulares y no regulares

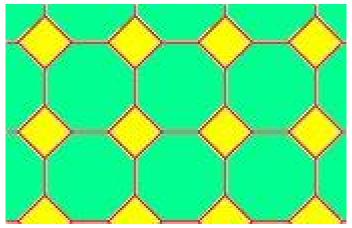
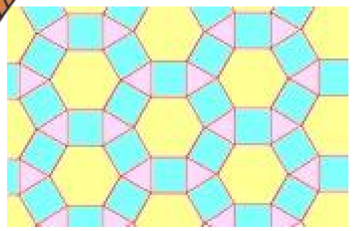
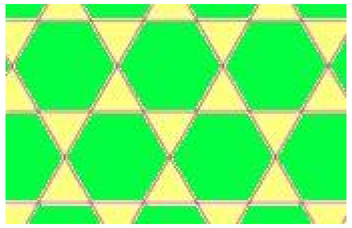
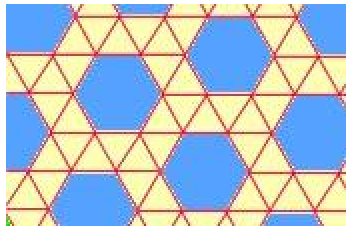
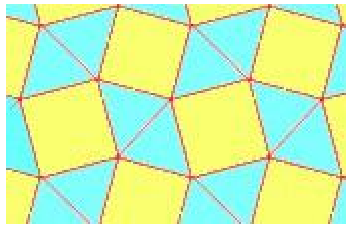
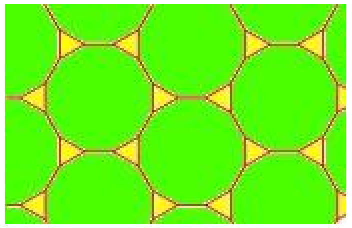
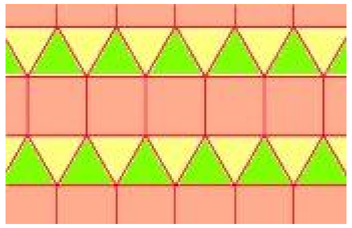
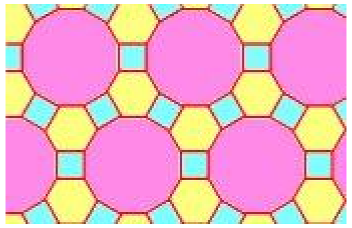
¿Se puede teselar el plano con un único polígono (convexo) no regular?

- Todo triángulo, sean como sean sus lados y sus ángulos, tesela el plano.
- Todo polígono convexo de cuatro lados puede teselar el plano, independientemente de la medida de sus lados y de sus ángulos.
- Existen tres hexágonos irregulares que son capaces de teselar el plano.
- Ningún polígono convexo de 7 o más lados, ya sea regular o irregular, puede teselar el plano.



Los teselados semirregulares son aquellos con varios tipos de polígonos regulares colocados de tal manera que en cada vértice hay la misma distribución.

Solo hay 8 tipos.

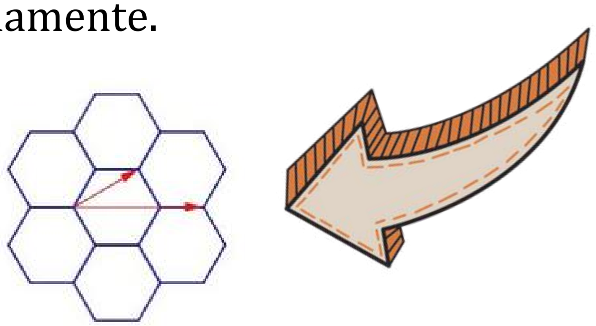









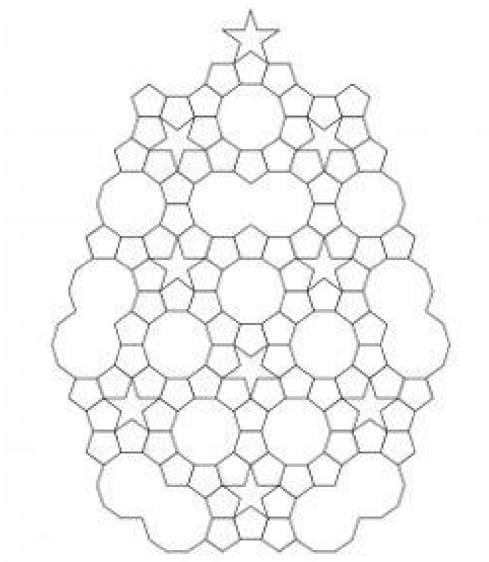
04 Teselados 2D periódicos y aperiódicos

Teselados periódicos

Son aquellos que con un único sector del plano ya tenemos el patrón para ampliar el resto del teselado hasta el infinito, repitiéndolo periódicamente.

Estos teselados son invariantes por dos traslaciones independientes que recubren el plano, y por lo tanto, basta con conocer una porción finita para reconstruirlos indefinidamente.





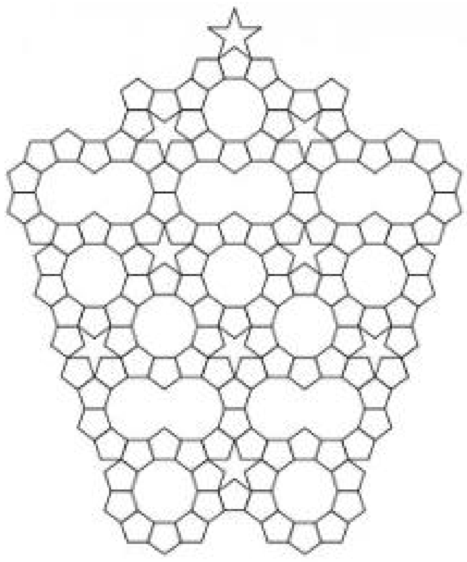
¡ En 1960 Hao Wang se preguntó si existía un conjunto de teselas que cualquier teselado que construyamos con ellas debe ser no periódico. Él pensaba que no era posible. Pero unos años más tarde Berger, uno de sus alumnos, descubrió 20.426 losetas que conseguían hacer esto. Y ahí empezó la lucha por encontrar teselados aperiódicos con el mínimo número de teselas. !

Teselados aperiódicos

Aquellos que no son periódicos y además es imposible disponer sus piezas de forma que constituyan un teselado periódico.

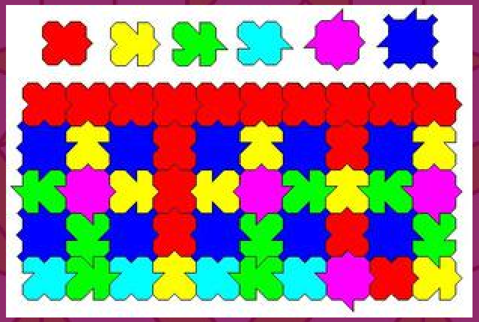
No periódico, pero no tanto

Este teselado no es periódico pero se puede construir con los mismos polígonos un teselado periódico como puedes ver a continuación.



05 Teselados 2D aperiódicos

Buscando teselados aperiódicos con el mínimo número de piezas

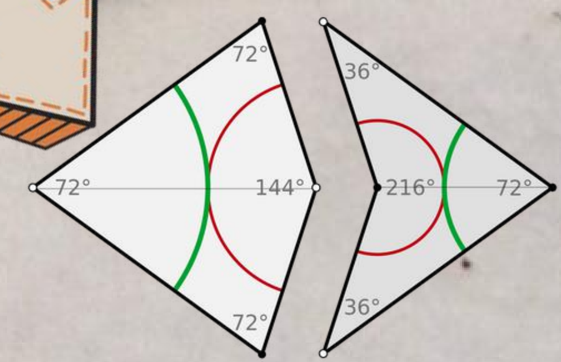


- 1964 Robert Berger encontró un teselado aperiódico con 20.426 formas. Luego lo redujo a 104.
- 1968 Donald Knuth consiguió un teselado aperiódico de 92 formas.
- 1971 Raphael M. Robinson obtuvo un teselado aperiódico con 6 formas.
- 1974 Penrose encontró un teselado aperiódico con 4 tipos de formas: pentágonos, estrellas, barcos y diamantes.

Buscando teselados aperiódicos con el mínimo número de piezas

La proporción de flechas y cometas necesaria para teselar el plano es sorprendentemente el número de oro.

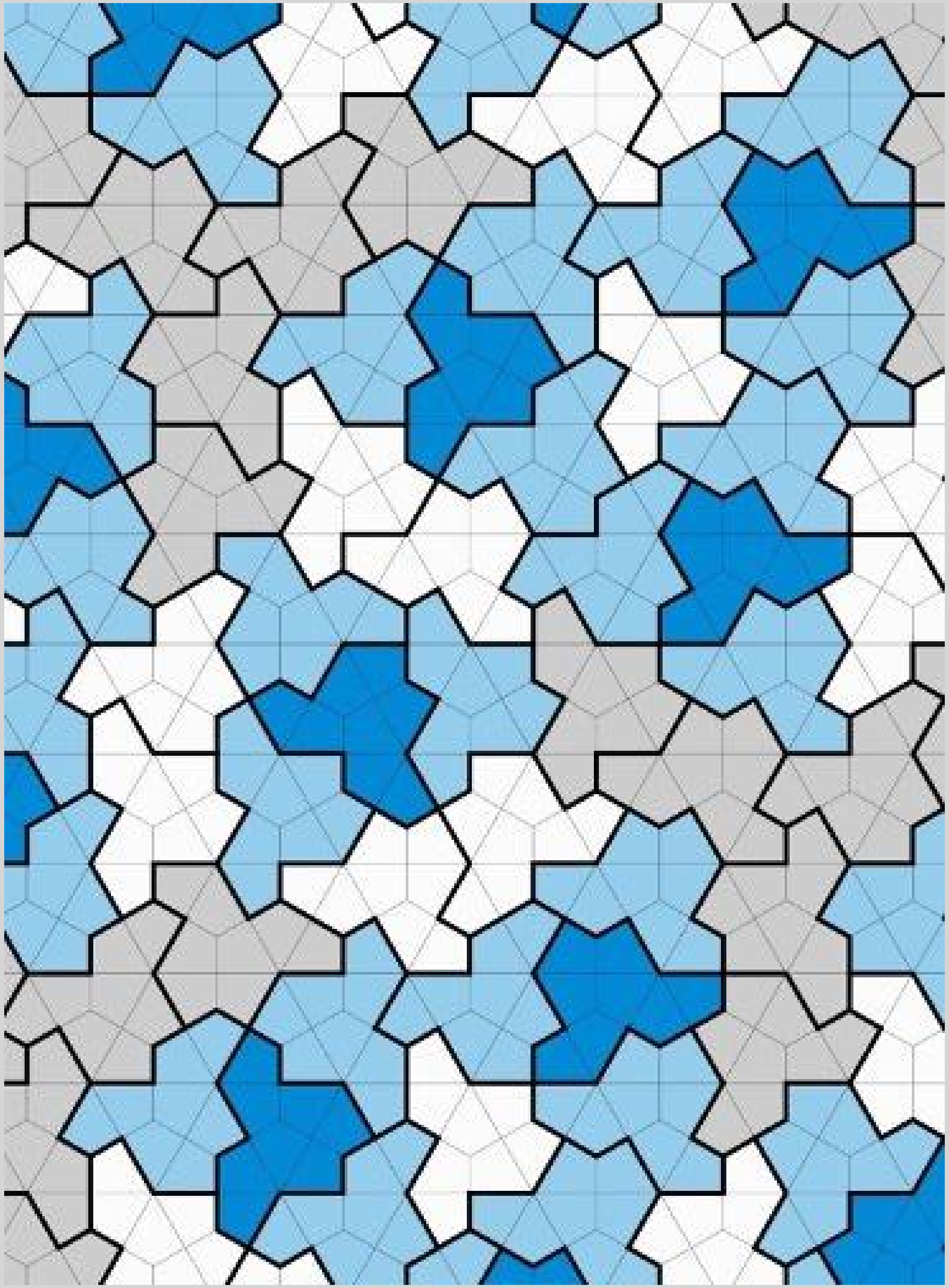
En 1976 Penrose propone un teselado formado por 2 piezas (cometa y flecha). Hay que teselar de forma que las curvas que están dibujadas sobre las piezas definan una curva global.



Buscando teselados aperiódicos con el mínimo número de piezas

Recientemente, en 2023 David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan y Chaim Goodman-Strauss han propuesto un teselado aperiódico con una sola pieza poligonal con ángulos racionales a la que han llamado “el sombrero” porque se asemeja a ese objeto. En el momento de generación de esta guía, el trabajo está en evaluación científica pendiente de confirmar la veracidad de los resultados. De ser ciertos se habrá resuelto un problema que lleva casi 60 años abierto. Lo descubrió en noviembre de 2022 el ingeniero jubilado David Smith (64 años) de Yorkshire, Inglaterra; se lo contó a Craig Kaplan, informático de la Universidad de Waterloo en Ontario, que decidió emprender una demostración junto con el informático Joseph Samuel Myers y el matemático Chaim Goodman-Strauss de la Universidad de Arkansas.

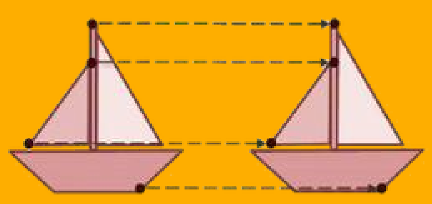
Variantes del teselado del sombrero generan una familia numerable de teselados aperiódicos nuevos con una sola pieza.

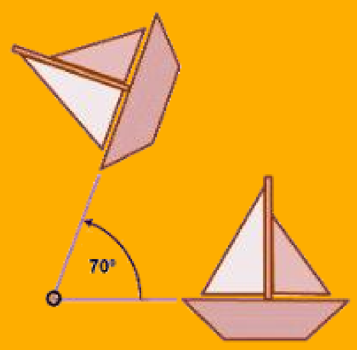


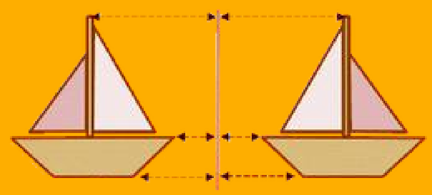
La geometría de los artesanos nazaríes

Los artesanos nazaríes (siglos XIII y XIV) utilizaron los movimientos en el plano para crear diseños geométricos que hoy podemos observar en la Alhambra. Estos movimientos son las simetrías:

- Traslaciones (determinada por un vector).
- Rotaciones (determinada por un centro y un ángulo).
- Reflexiones (determinada por una recta).







El grupo de simetrías

Una figura en el plano es simétrica respecto de una simetría si al aplicarle esta transformación deja el aspecto de la figura sin cambios.

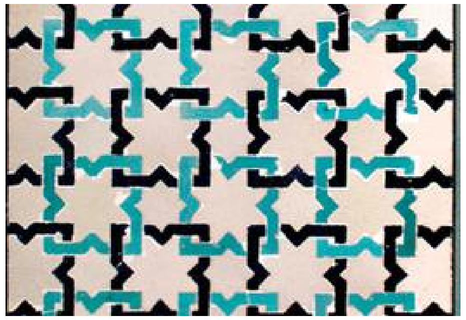
El grupo de simetrías de una figura es la colección de todas las simetrías para las que la figura es simétrica.

09 Los 17 grupos cristalográficos de la Alhambra

Dos traslaciones (pajarita nazar)
Palacio de Comares

Tres simetrías centrales (o giros de 180º)
Museo de la Alhambra

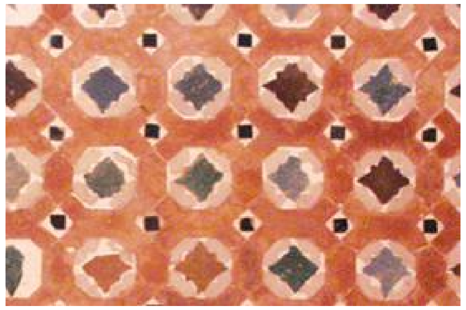
Dos giros de 120º
Baño de Comares



Dos giros de 120º
Baño de Comares

Una simetría central y un giro de 120º
Museo de la Alhambra

Dos simetría axiales y una traslación
Museo de la Alhambra



Cuatro simetrías axiales en los lados de un rectángulo (2 horizontales y 2 verticales)
Museo de la Alhambra

Una simetría axial y dos simetría centrales
Palacio de los Leones

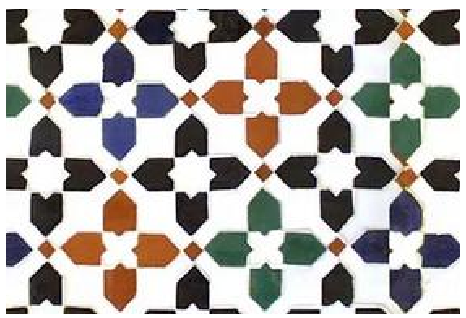
Dos simetrías axiales perpendiculares y una simetría central (pez volador)
Palacio de Comares

Una simetría axial y un giro de 120º
Puerta del vino

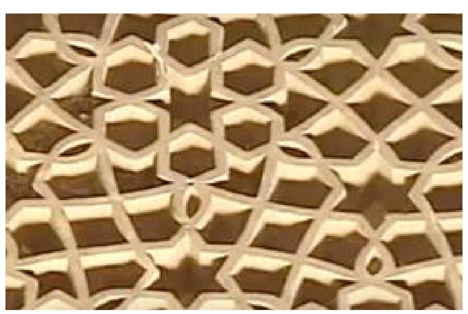
10 Los 17 grupos cristalográficos de la Alhambra

Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo equilátero (ángulos 60-60-60)
Palacio de los Leones

Una simetría axial y un giro de 90º
Torre de la Cautiva



Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 45-45-90
Mirador de Lindaraja



Tres simetrías axiales en los lados de un triángulo de ángulos 30-60-90
Palacio de Comares

Una simetría axial y una simetría con deslizamiento perpendicular
Patio del Cuarto Dorado

Dos simetrías con deslizamiento paralelas
Puerta del vino

Dos simetrías con deslizamiento perpendiculares
Puerta del vino

Solo hay 17 grupos

Los teselados de la Alhambra contienen todos los grupos cristalográficos planos. Resulta curioso que el resultado matemático que establece que estos son los únicos posibles fue probado por Evgraf Stepanovich Fedorov en 1891 mientras que estos teselados datan del siglo XIV.

11 Escher, la Alhambra y los 2D Teselados

Visitas de Escher a la Alhambra

Maurits Cornelis Escher fue un artista neerlandés conocido por experimentar en sus grabados con espacios que mezclan imágenes en dos y tres dimensiones, desafiando los métodos estándar de representación espacial.

En sus construcciones de teselados con imágenes, muchas veces de animales, realiza un estudio de la simetría ideando un algoritmo para generar patrones usando cuadrados decorados. En estos teselados juega con el color, incluyendo la misma figura en dos colores que recubre el plano.

Escher visitó la Alhambra en dos ocasiones: en 1922 y en 1936. Los mosaicos de la Alhambra fueron su punto de inspiración para sus famosos teselados.

12 Teselados 2D: las obras y las autorías

Red flower tessellation, ILAN GARIBI

Water bomb tessellation, ILAN GARIBI

Adulthood tessellation, ILAN GARIBI

Hilula tessellation, ILAN GARIBI

Templar garden tessellation, ILAN GARIBI

Waves tessellation, ILAN GARIBI

Origami hidrangea, SHUZO FUJIMOTO

Teselado tricolor con cuadrados, DESCONOCIDO

Teselados 3D

Piezas para recubrir el espacio

Poliedro: cuerpo geométrico delimitado por caras planas y encerrando un volumen finito.

Poliedro convexo: poliedro en el que todos los segmentos que unen dos puntos del poliedro o del interior también están contenidos en el poliedro (incluido el interior).

Fórmula de Euler para poliedros convexos

Caras - Aristas + Vértices =2

¿Cuántos existen? Solo 5

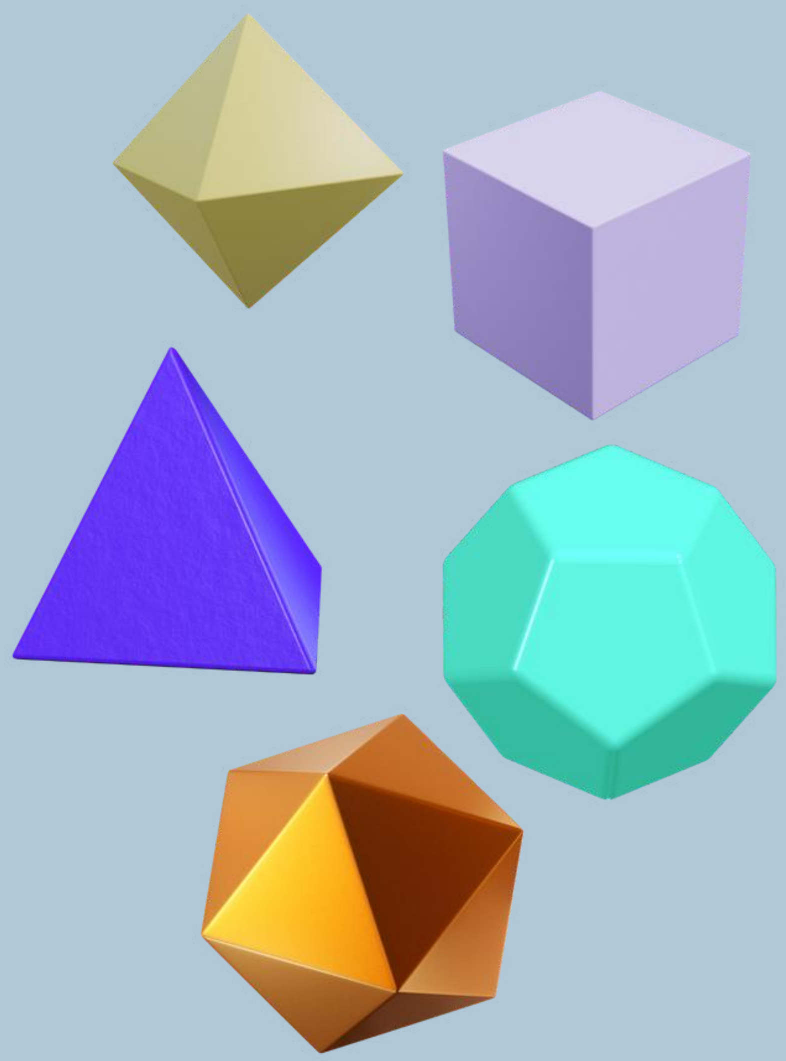
Sólidos platónicos: son poliedros convexos donde todas sus caras son polígonos regulares iguales entre si y todos los ángulos sólidos son iguales.

Hay referencias de unas bolas neoliticas (2000 a. C.) talladas en piedra y encontradas en Escocia que tienen estas formas.

Teeteto (417-369 a. C.) probó que solo existen cinco sólidos platónicos:

- ✦ el fuego es el tetraedro,
- ✦ el aire es el octaedro,
- ✦ el agua es el icosaedro,
- ✦ la tierra es el cubo,
- ✦ el universo es el dodecaedro.

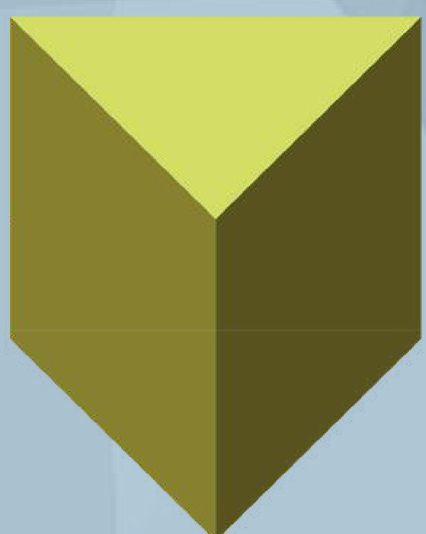
Timeo de Locri (diálogo de Platón)



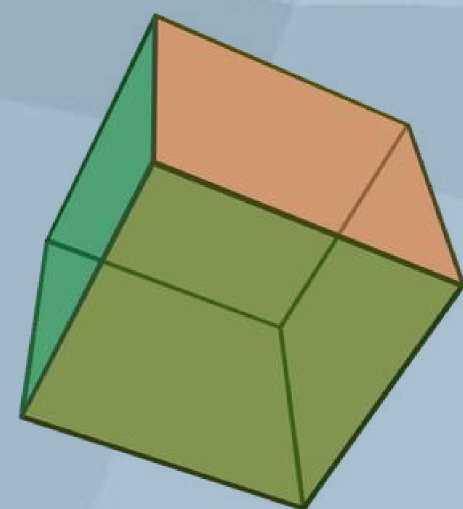
03 Rellenando el espacio con poliedros

5 poliedros convexos con caras regulares que llenan el espacio

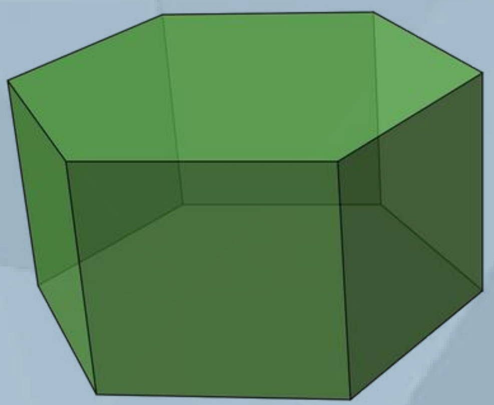
PRISMA

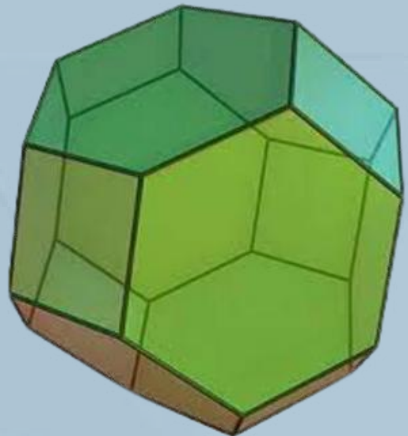


CUBO

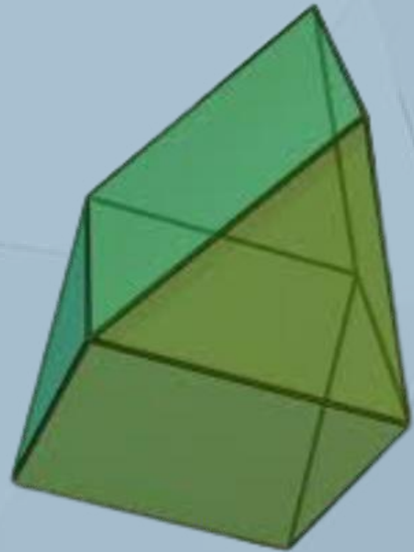


PRISMA HEXAGONAL





OCTOEDRO TRUNCADO



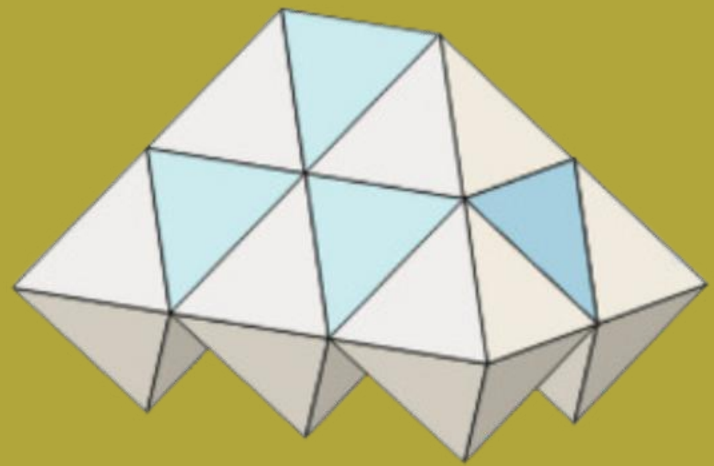
GYROBFASTGIUM

04 Rellenando el espacio con poliedros

Recubriendo el espacio con otros poliedros convexos

DODECAEDROS RÓMBICOS

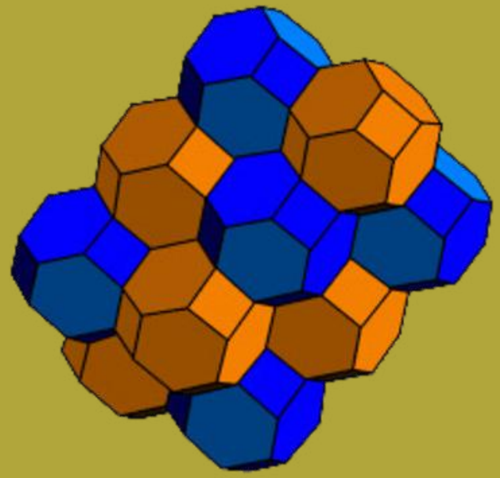
COMBINACIÓN DE TETRAEDROS Y OCTAEDROS

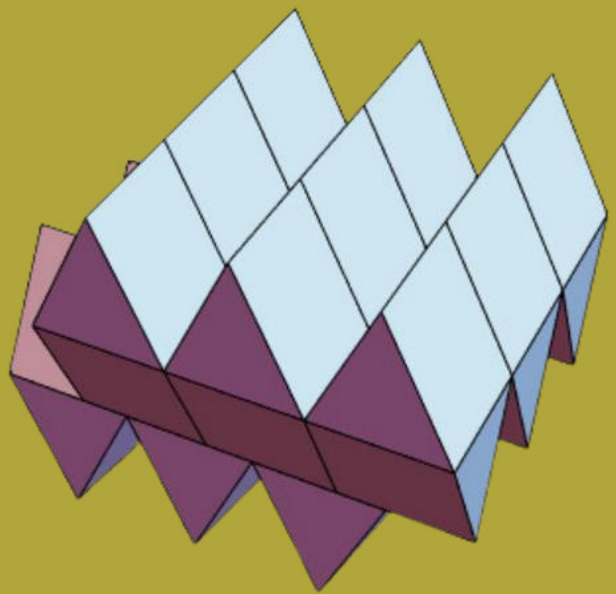


BIPRISMA DE SCHMITT-CONWAY

Llena el espacio aperiódicamente

OCTAEDRO TRUNCADO





05 Teselados 3D: las obras

TESELADO 3D CON 1 TIPO DE POLIEDROS

Hexaedro o cubo (regular)

TESELADO 3D CON 1 TIPO DE POLIEDROS

Octaedro truncado (semirregular)

TESELADO 3D CON 1 TIPO DE POLIEDROS

Dodecaedro rómbico (poliedro de Catalán)

TESELADO 3D CON 1 TIPO DE POLIEDROS

Dodecaedro rómbico estrellado (poliedro estrellado)

TESELADO 3D CON 2 TIPOS DE POLIEDROS

Octaedro (regular) y Cuboctaedro (semirregular)

TESELADO 3D CON 2 TIPOS DE POLIEDROS

Tetraedro (regular) y Octaedro (semirregular)

TESELADO 3D CON 2 TIPOS DE POLIEDROS

Octaedro (regular) y Hexaedro truncado (semirregular)

TESELADO 3D CON 3 TIPOS DE POLIEDROS

Tetraedro (regular), Hexaedro (regular) y Rombicuboctaedro pequeño (semirregular)

TESELADO 3D CON 3 TIPOS DE POLIEDROS

Hexaedro (regular), Octaedro truncado (semirregular) y Rombicuboctaedro grande (semirregular)

Kusudamas

01 Kusudamas

El arte de colocar figuras modulares sobre esferas

El Kusudama es una variante japonesa del origami que consiste en realizar figuras modulares y colocarlas en una disposición esférica.

Cada una de sus partes individuales deben partir de una sola hoja de papel de tamaño predeterminado.

Su etimología es «Kusu» (medicina) y «Dama» (esfera).

Tradicionalmente las esferas se realizaban con formas de flores y se colgaban encima de las camas de los enfermos rellenas con hierbas aromáticas para ayudarles a curar.

Kusudamas como cápsidas de virus

Yoshihide Momotani, en su libro en japonés “Modelos moleculares con origami”, propone como modelo de las cubiertas proteicas (cápsidas) de los virus esféricos los Kusudamas. Cada módulo puede representar una molécula y el encaje de estos módulos representarían el proceso de formación de una cápsida.

02 Kusudamas

03 Kusudamas: las obras y la autoría

Origami starSea kusudama

Kusudama construido con 30 piezas idénticas en forma de cuadrados. El resultado final es un objeto geométrico esférico en el que se pueden distinguir diversas estrellas de 5 puntas recubriendo la esfera. Este diseño es de la japonesa Tomoko Fuse.

Trisoctohedro

Octaedro con pirámides añadidas a cada cara. Está construido con 12 piezas cuadradas. Se agrupan de 3 en 3 formando 4 módulos de 8 pirámides de base un triángulo equilátero. Este diseño es de la japonesa Tomoko Fuse.

Handball of giganteum (2 versiones)

Una de las versiones consta de 60 módulos generados cada uno desde un cuadrado: 30 de los módulos se pliegan en un sentido y los otros 30 en sentido contrario. La diferencia con la segunda versión es que los 30 módulos primeros se dejan con las puntas hacia fuera. En las dos versiones estos módulos se atan al centro de la esfera. Estos diseños son de la japonesa Tomoko Fuse.

Nordblumen

Diseñado por Irina Krivyakina. Para construirlo debemos plegar 60 módulos a partir de cuadrados que se encajan para formar estrellas de 5 puntas y luego 30 módulos más que sirven para entrelazar una estrella con otra.

Dragon heart

Consta de 30 módulos que se crean a partir de cuadrados. Con cada 3 módulos se forma una pirámide. Estás deben unirse de 5 en 5 hasta cerrar la esfera. El diseño original es del italiano Paolo Bascetta.

Origami cherry blossom ball

Se trata de una reproducción de una bola con flores de cerezo. Para su realización se precisa de 30 módulos diseñados cada uno de ellos desde un cuadrado. Este diseño es de la japonesa Tomoko Fuse.

Dodecaedro estrellado

El gran dodecaedro estrellado es uno de los cuatro poliedros regulares no convexos. Se construye a partir de 30 módulos generados por cuadrados. Este diseño es de la japonesa Tomoko Fuse.

01 Las mujeres que la hicieron posible

Tinerflecta

Tinerflecta es un grupo de 9 mujeres y profesoras de primaria o secundaria dedicadas al desarrollo de la papiroflexia como una herramienta de acercamiento a las matemáticas de una manera diferente. Comenzaron su andadura en el año 2005 trabajando en talleres y llevando al aula estas técnicas de trabajo. Ellas son Pili Acosta, Marisa Benito, Bebey Borges, Quisquis Borges, Elena Borges, Rosi Cano, Sany Dorta, Maife Martín y Tere Rodríguez.

Aunque el objetivo inicial que las unió fue la parte del currículo de Secundaria dedicada a la geometría que, por falta de tiempo, en la mayor parte de los casos no era atendida, la propia belleza de las obras las ha animado a realizar exposiciones para un público general como *Total y Parte.*

Mostrar la belleza artística de las matemáticas a través del arte del doblado de papel es una de las gratificaciones que les aporta su trabajo.

En esta exposición se muestran algunos de los plegados que, por su belleza o valor matemático, se han atrevido a desarrollar. Se trata de versiones o reproducciones de grandes maestras y maestros de la papiroflexia.

Diseñadora de paneles, papel de plegado y publicidad
Carla Garrido Puerta

Comisarias de la exposición
Mª Candelaria González Dávila y Edith Padrón Fernández

02 Las entidades que lo hicieron posible

Agradecimientos

Queremos que conste aquí nuestro agradecimiento a todas las entidades y personas que han ayudado a financiar este proyecto:

El Ayuntamiento de la Laguna con la concejalía de Cultura y participación ciudadana y la concejalía de Educación, Juventud, Desarrollo Económico Local, Empresa, Empleo y OMIC, de las que siempre hemos recibido el apoyo que le hemos solicitado en relación con los local es y la publicidad de la exposición.

El Cabildo de Tenerife, muy especialmente a su dirección Insular de Cultura, que con la subvención concedida a la Universidad de La Laguna en la convocatoria para la financiación de proyectos de interés cultural en el año 2023 se pudo co-financiar gran parte de esta exposición.
La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Luis Balbuena Castellano* con los que la colaboración y el trabajo conjunto es parte de nuestra historia.

La Real Academia Canaria de Ciencias que nos apoyó desde que le presentamos el proyecto.

Y por supuesto, la Universidad de La Laguna, muy especialmente al Vicerrectorado de Cultura, Participación Social y Campus Ofra y La Palma, que siempre ha estado apoyando las iniciativas del Aula Cultural Matemática Divulgativa.

Este trabajo va dedicado muy especialmente a todas las personas que confiaron en nuestro trabajo y nuestra inquietud por mostrar la belleza de las matemáticas.