

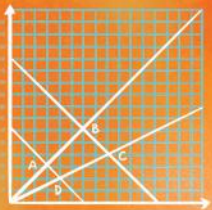
ÉDITION
OCTOBRE
2025

Florence Grandchamp
Drita Neziri
Abdelkader Amara
Raymond Thériault

OPTIMISATION
EN CONTEXTE FONDAMENTAL

MAT
A_{SN}
5170 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE



Graphismes, notations et symboles

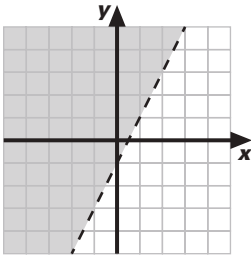
$(20, 80)$	couple de coordonnées 20 et 80
$<$	est plus petit que, est inférieur à
\leq	est plus petit ou égal à, est inférieur ou égal à
$>$	est plus grand que, est supérieur à
\geq	est plus grand ou égal à, est supérieur ou égal à
Z	fonction objectif ou économique

Graphismes, notations
et symboles utilisés
dans ce module

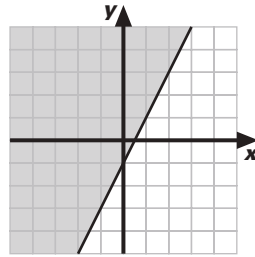
Rappel de quelques notions



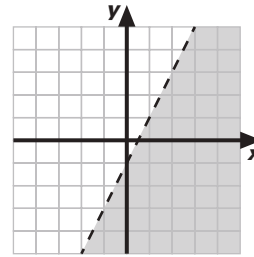
Représentation graphique d'une inéquation



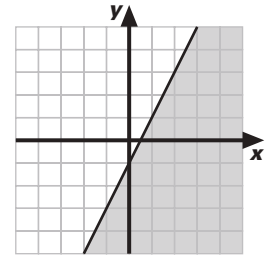
$$y > 2x - 1$$



$$y \geq 2x - 1$$



$$y < 2x - 1$$



$$y \leq 2x - 1$$

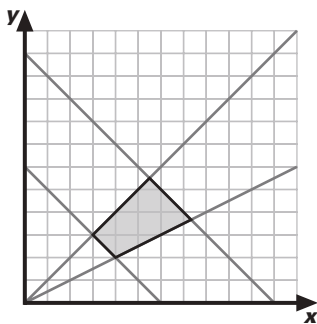
Contrainte

Inéquation du type $Ax + By + C > 0$ ou $Ax + By + C < 0$ ou $Ax + By + C \geq 0$ ou $Ax + By + C \leq 0$ représentant une condition restrictive par rapport aux données d'un problème d'optimisation.

Fonction objectif ou économique

Expression de la forme $Z = Ax + By + C$ dont on recherche la valeur minimale ou la valeur maximale.

Polygone de contraintes



Région du plan cartésien formée par l'intersection des représentations graphiques de chacune des contraintes d'un problème d'optimisation.

Sommets d'un polygone de contraintes

Intersections des droites formant les limites du polygone. On calcule algébriquement les coordonnées d'un sommet en résolvant le système de deux équations associées aux droites qui se croisent en ce sommet.

Solution d'un problème d'optimisation

Coordonnées d'un sommet du polygone de contraintes qui donnent la valeur maximale ou minimale de la fonction objectif.

OPTIMISATION EN CONTEXTE FONDAMENTAL

Conforme au Programme



MAT_{SN} 5170 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

NE ME JETEZ PAS !
GARDEZ-MOI
COMME AIDE-MÉMOIRE



Car « *la mémoire est une faculté qui oublie* »
... en maths comme en toutes choses.

CE LIVRE APPARTIENT À : _____

La collection



Tous les titres
de la collection MAT
au catalogue



FORMATION DE BASE COMMUNE:

Présecondaire

MAT P101 4 MAT P102 3 MAT P103 2 MAT P104 4

Secondaire 1

MAT 1101 3 MAT 1102 3

Secondaire 2

MAT 2101 3 MAT 2102 3

Mise À Niveau

MAN P100 MAN 1100 MAN 2100

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE:

Secondaire 3

MAT 3051 2 MAT 3052 2 MAT 3053 2

Secondaire 4

CST MAT 4151 1 MAT 4152 1 MAT 4153 2

TS MAT 4261 2 MAT 4262 2 MAT 4263 2

SN MAT 4271 2 MAT 4272 2 MAT 4273 2

Secondaire 5

CST MAT 5150 2 MAT 5151 1 MAT 5152 1

TS MAT 5160 2 MAT 5161 2 MAT 5163 2

SN **MAT 5170 2** MAT 5171 2 MAT 5173 2

FORMATION À DISTANCE:

Secondaire 1, 2 et 3

Tous les guides d'apprentissage du secondaire 1, 2 et 3 ont été adaptés pour les besoins de la formation à distance. Pour en savoir plus: voyez notre site www.ebbp.ca

Secondaire 4 et 5 — *En préparation*

Ouvrages déjà parus au catalogue:

MAT 1005 2	MAT 1006 2	MAT 1007 2	MAT 2006 2	MAT 2007 2	MAT 2008 2
MAT 3015 2	MAT 3016 2	MAT 3017 2			
MAT 4101 2	MAT 4102 1	MAT 4103 1	MAT 4104 2	MAT 4105 1	MAT 4106 1
MAT 4107 1	MAT 4108 1	MAT 4109 1	MAT 4110 1	MAT 4111 2	
MAT 5101 1	MAT 5102 1	MAT 5103 1	MAT 5104 1	MAT 5105 1	MAT 5106 1
MAT 5107 2	MAT 5108 2	MAT 5109 1	MAT 5110 1	MAT 5111 2	MAT 5112 1
MAN 1000	MAN 2000	MAN 3000		MAT 1005 FAD à MAT 5112 FAD	

Florence Grandchamp
Drita Neziri
Abdelkader Amara
Raymond Thériault

**OPTIMISATION
EN CONTEXTE FONDAMENTAL**

MAT
A_{SN}
5170 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE





L'ensemble des titres admissibles de notre production bénéficie du soutien financier du gouvernement du Canada.

Communication et pédagogie	Christiane Beullac
Composition et index	Audrey d'Amboise Francisca Martinez Galvez Valérie Tardif
Conseiller en mathématiques	Raymond Thériault
Correction	Jonathan Crête
Direction de la collection	Célestin de La Grange
• contenu éditorial	Annie Lopez
• contenu mathématique	Florence Grandchamp
• infographie et production	Francine Plante
Ideatrice	Marianne Delaroche
Illustrations	Paul Bordeleau
Informatique éditoriale	Francisca Martinez Galvez
Maquette de la couverture	Jean-Sébastien Lajeunesse Michel Lajeunesse
Maquette de l'ouvrage	Célestin de La Grange Francine Plante
Réécriture	Jonathan Crête
Révision mathématique	Sylvain Gervais

À propos de photocopie

Photocopier sans permission un imprimé — une œuvre complète ou un passage d'une œuvre —, c'est aussi plagier. C'est aussi s'approprier indûment le fruit du travail d'un auteur.

Et, la plupart du temps, la photocopie gâte l'œuvre, et fait perdre le bénéfice de cinq cents ans de pratique de l'imprimerie: c'est un péché contre l'esprit, en plus d'être un acte malhonnête.

Photocopier sans permission: c'est voler.

Méprisons la photocopie sauvage. Méprisons le vol.

Droits d'auteur et droits de reproduction

Toutes les demandes de reproduction doivent être acheminées à: Copibec (reproduction papier) 514 288-1664 1 800 717-2022 licences@copibec.qc.ca

© Œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute reproduction interdite sans autorisation de l'éditeur.

Tout usage en location ou prêt est interdit sans autorisation écrite octroyée par Kinésis éducation inc.



Impression	Imprimerie Héon & Nadeau
Éditrice déléguée	Francine Plante / Les Éditions Jules Châtelain

Page des crédits



Pour en savoir plus sur l'illustrateur et sur les illustrations de votre module, voir p. 165



© 2022, Kinésis éducation inc. Tous droits réservés.

Dépôt légal — Bibliothèque et Archives nationales du Québec, Bibliothèque et Archives Canada, 2022.

ISBN 978-2-7615-0779-0

À L'ÉTUDIANT ET À L'ENSEIGNANT POUR CETTE PREMIÈRE ÉDITION 2022

Vous avez en main la première édition revue et corrigée du module MAT 5170, dix-neuvième module de notre collection MAT FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE.

Les auteurs, les correcteurs, les réviseurs et toute l'équipe éditoriale et technique ont fait de leur mieux pour que cet ouvrage respecte l'esprit et la lettre du programme, et réponde à vos attentes et à vos besoins. Mais nul, ni rien, n'est parfait sur terre: moins que quiconque, nous prétendons avoir atteint la perfection, même après révision et correction.

Les auteurs et l'éditeur demandent aux utilisateurs – étudiants et enseignants – de leur faire part de leurs commentaires et de leurs suggestions le plus tôt possible pour que nous puissions dès la prochaine impression apporter les retouches, les modifications ou les ajouts qui se révéleraient nécessaires.

D'autre part, n'hésitez pas à nous signaler coquilles ou erreurs si vous en trouvez: **nous ne procédons jamais à une réimpression sans avoir d'abord effectué les corrections ou les retouches nécessaires.** Un ouvrage didactique n'est pas une œuvre immuable, au contraire, c'est un outil perfectible et en perpétuel devenir.

Avec la collaboration de toutes et de tous, nous pourrions ensemble améliorer et raffiner, au fil des ans, un document dont nous voudrions qu'il soit pour vous l'outil rêvé. Nous ferons tout pour qu'il le devienne.

Écrivez-nous, téléphonez-nous, ou adressez-nous un courriel à l'adresse **cbeullac@ebbp.ca**, la responsable des communications et notre responsable des médias sociaux. Nous accusons toujours réception de la correspondance reçue des utilisateurs. Vous pouvez aussi nous visiter sur le site www.ebbp.ca.

N'hésitez surtout pas!



Depuis plus de soixante-cinq ans, nous n'avons jamais cessé de travailler en étroite collaboration avec le monde de l'enseignement, et nous voulons continuer de le faire: que vous soyez étudiant ou enseignant, merci de garder le contact avec nous par le moyen qui vous est le plus commode: téléphone, télécopieur, courriel.

L'éditeur

KINÉSIS ÉDUCATION

Bureau 260, 1750, boulevard Marie-Victorin, Longueuil, Québec J4G 1A5

Téléphone: +1 450 332 4499 Télécopieur: +1 450 332 4403

Courriel: cbeullac@ebbp.ca Site: www.ebbp.ca



Graphismes, notations et symboles	page 3 de couverture
Représentation graphique d'une inéquation	page 3 de couverture
Contrainte	page 3 de couverture
Fonction objectif ou économique	page 3 de couverture
Polygone de contraintes	page 3 de couverture
Sommets d'un polygone de contraintes	page 3 de couverture
Solution d'un problème d'optimisation	page 3 de couverture
À l'étudiant et à l'enseignant	V
Présentation	VIII
Comment est construit votre MAT 5170	X
Attentes de fin de cours	XII

01. PROGRAMMATION LINÉAIRE

Mise en situation:	
AU SALON DE L'AUTO	2
1.1. Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues	4
1.2. Résolution et représentation graphique d'inéquations du premier degré à deux variables	17
1.3. Systèmes d'inéquations du premier degré à deux variables	25
1.4. Représentation algébrique et graphique des contraintes	34
1.5. Analyse des sommets d'un polygone de contraintes	47
Pour en savoir un peu plus...: La droite baladeuse	60
1.6. Vue d'ensemble: synthèse des savoirs	61
Consolidation des savoirs	62
1.7. Situations de vie	68
Situations d'évaluation de fin de chapitre SÉ	93
Évaluation des connaissances	94
Évaluation des compétences	97
Prêt pour l'évaluation de fin de module?	102
Révision des connaissances	102
Révision des compétences	110
Glossaire des termes mathématiques	125
Corrigé	127
Index	163
À propos de l'illustrateur et des illustrations...	165

Nos petits plus...

Pour en savoir un peu plus...	60
-------------------------------	-----------

OPTIMISATION EN CONTEXTE FONDAMENTAL

Le module MAT 5170, intitulé **Optimisation en contexte fondamental**, aspects d'une grande famille de situations d'apprentissage: *Recherche de solutions optimales*. Cette famille regroupe les situations qui comportent un problème devant en partie être traité par l'optimisation à l'aide de la programmation linéaire. Le module **Optimisation en contexte fondamental** vous fournira l'occasion de poser des actions en vue de vous rendre apte à maximiser un profit, un procédé, un nombre d'objets ou de personnes, ou encore à minimiser des coûts ou des pertes.

En traitant les situations-problèmes de ce module, vous serez amené, entre autres, à reconnaître et décoder le sens des symboles, des termes et des notations, à distinguer le sens des termes mathématiques de ceux qui relèvent du sens commun ou encore, à déduire la solution optimale en substituant aux coordonnées de l'équation de la fonction économique, les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.

COMPÉTENCES DISCIPLINAIRES

Pour résoudre des situations-problèmes proposées, vous aurez recours aux trois compétences disciplinaires, soit:

- Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes;
- Déployer un raisonnement mathématique;
- Communiquer à l'aide du langage mathématique.

COMPÉTENCES TRANSVERSALES

Plusieurs compétences transversales peuvent contribuer au traitement de situations de la famille *Recherche de solutions optimales*. Le programme d'études en propose deux qui apparaissent les plus appropriées pour ce cours:

- Compétence d'ordre intellectuel:** *Résoudre des problèmes;*
- Compétence d'ordre intellectuel:** *Exploiter l'information.*

CONTENU DISCIPLINAIRE

Dans ce cours, vous réactiveriez et approfondirez un ensemble de savoirs arithmétiques et algébriques acquis précédemment. Afin de traiter efficacement les situations-problèmes, vous complétez votre formation en vous appropriant les savoirs propres à ce cours.

Savoirs prescrits

En vue de traiter efficacement les situations d'apprentissage proposées dans ce cours, vous développerez un **procédé intégrateur** énoncé comme suit:

- L'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire.

SAVOIRS MATHÉMATIQUES**Programmation linéaire**

SM-1 Système d'inéquations du premier degré à deux variables

SM-2 Représentation des contraintes et de la fonction à optimiser

(fonction objectif ou économique)

(détermination et interprétation des sommets et de la région-solution

ouverte ou fermée ou non)

(modification des conditions de la situation pour la rendre plus efficiente

Tous les savoirs
mathématiques : SM.
On le reconnaît
à ce picto associé
aux Outils mathématiques.



Présentation des *compétences disciplinaires*, des *compétences transversales*, et du contenu disciplinaire visés par le MAT 5170. ➔ page VIII

Les deux pages

Comment est construit votre module.
Vous retrouverez des pages +détaillées un peu +loin à cet extrait.



01

PROGRAMMATION LINÉAIRE

En début de module une *mise en situation*, ici : **AU SALON DE L'AUTO**.

Elle est tirée de la vie courante réelle ou virtuelle, et illustre l'utilité de la matière qui sera abordée.

DANS CE MODULE, vous dit ce que vous verrez comme nouvelles notions, à quoi cela sert en mathématique et dans la vie de tous les jours. ➔ page 2



Au début de chaque section : les

Outils mathématiques nécessaires à l'acquisition des *savoirs mathématiques*. Présentation succincte, niveau de langue simple, exemples concrets, illustrations au besoin.

➔ page 4 et suivantes



Votre MAT 5170 est divisé en sections :

1.1. Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues

1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

Un résumé des *savoirs mathématiques* est présenté sous forme de tableau. Il est suivi de *consolidations des savoirs* pour vous aider à maîtriser les nouveaux *savoirs mathématiques*.

➔ page 61 et suivantes

En conclusion du chapitre, des

1.7. Situations de vie

font un *retour sur la mise en situation du début*, laquelle peut maintenant être résolue grâce aux savoirs et compétences acquis dans ce chapitre.

➔ page 68



MAT 5170

PRÊT POUR L'ÉVALUATION DE FIN DE MODULE ?

PREMIÈRE PARTIE Révision des connaissances

Banque de questions portant chacune sur l'un des *savoirs mathématiques* du module.

DEUXIÈME PARTIE Révision des compétences

Banque de *situations-problèmes* permettant de vérifier l'acquisition de toutes les compétences liées à ce module.

➔ page 102

MAT 5170 GLOSSAIRE DES TERMES MATHÉMATIQUES

Un mini-dictionnaire : tous les termes apparaissant en **italique rouge gras** dans le module. ➔ page 125



Et des petits plus....

Pour en savoir un peu plus...

Pour les curieux... un prolongement des connaissances, et de l'enrichissement.

➔ page 60

Pour savoir où vous allez: la liste des *critères d'évaluation* de ce cours.

➔ page XII

Si on appliquait cette théorie?

Ensuite, des cas concrets en relation avec les *savoirs mathématiques* que vous avez découverts dans les **Outils mathématiques**.

➔ page 9 et suivantes

Activités d'apprentissage

Puis, de la pratique, pour vous aider à acquérir par étapes la ou les *compétences disciplinaires* à atteindre. Vous pouvez facilement repérer ces *activités d'apprentissage* grâce à la bande gris pâle sur la tranche du module.

➔ page 13 et suivantes

UN PEU DE PRATIQUE

Situations-problèmes

Viennent ensuite des situations plus globales et plus complexes, les *situations-problèmes* qui vous amèneront à maîtriser les *compétences transversales* visées par le MAT 5170. Ces situations se repèrent grâce à la bande gris foncé sur la tranche du module.

➔ page 76 et suivantes

UN PEU PLUS DE PRATIQUE

Situations d'évaluation de fin de chapitre

PREMIÈRE PARTIE

Évaluation des connaissances

DEUXIÈME PARTIE

Évaluation des compétences

Ces *SÉ* se trouvent vers la fin du module. Elles sont signalées par une bande rouge à rayures blanches sur la tranche. Elles sont en deux parties: la première vous permet de vérifier l'acquisition des connaissances, ou *savoirs mathématiques*; la seconde, l'acquisition des *compétences dites transversales*. ➔ page 93 et suivantes

Corrigé

Il vous donne les solutions de toutes les *activités d'apprentissage*, des *situations-problèmes* et des *consolidations des savoirs*.

Ce corrigé se repère grâce à la bande rouge sur la tranche du module.

➔ page 127 et suivantes

MAT 5170

INDEX

Une table alphabétique des mots-clés et leurs références. ➔ page 163 et suivantes

En tiré à part pour l'enseignant

- Corrigé des **SÉ de fin de chapitre**
- Corrigé du **Prêt pour l'évaluation de fin de module?**
- Grilles d'évaluation

ATTENTES DE FIN DE COURS

Objectifs visés
par ce cours



Au terme de ce cours, vous serez en mesure de représenter des situations mathématiques. Votre production, juste et claire, sera réalisée dans le respect des règles et des conventions mathématiques. Vous ferez ressortir les solutions limites dans votre analyse ainsi que les solutions entières lorsque la situation fera référence à des cas discrets ou que l'une des limites se retrouvera sur les points de la grille.

CRITÈRES D'ÉVALUATION

- Utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes
- Déployer un raisonnement mathématique
- Communiquer à l'aide du langage mathématique*

1. UTILISER DES STRATÉGIES DE RÉOLUTION DE SITUATIONS-PROBLÈMES

- 1.1 Manifestation, orale ou écrite, de la compréhension de la situation-problème
- 1.2 Mobilisation des stratégies et des savoirs mathématiques appropriés

2. DÉPLOYER UN RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

- 2.1 Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés
- 2.2 Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation
- 2.3 Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente

* La compétence 3 « Communiquer à l'aide du langage mathématique » ne fait pas l'objet d'une évaluation spécifique au regard de la sanction et de la reconnaissance. Toutefois, puisqu'elle se manifeste nécessairement dans toute activité mathématique, elle a été prise en compte dans les outils d'évaluation élaborés pour aider les enseignants à porter leur jugement.

OPTIMISATION EN CONTEXTE FONDAMENTAL

Votre MAT 5170
est présenté en 1 chapitre
dont voici le titre:



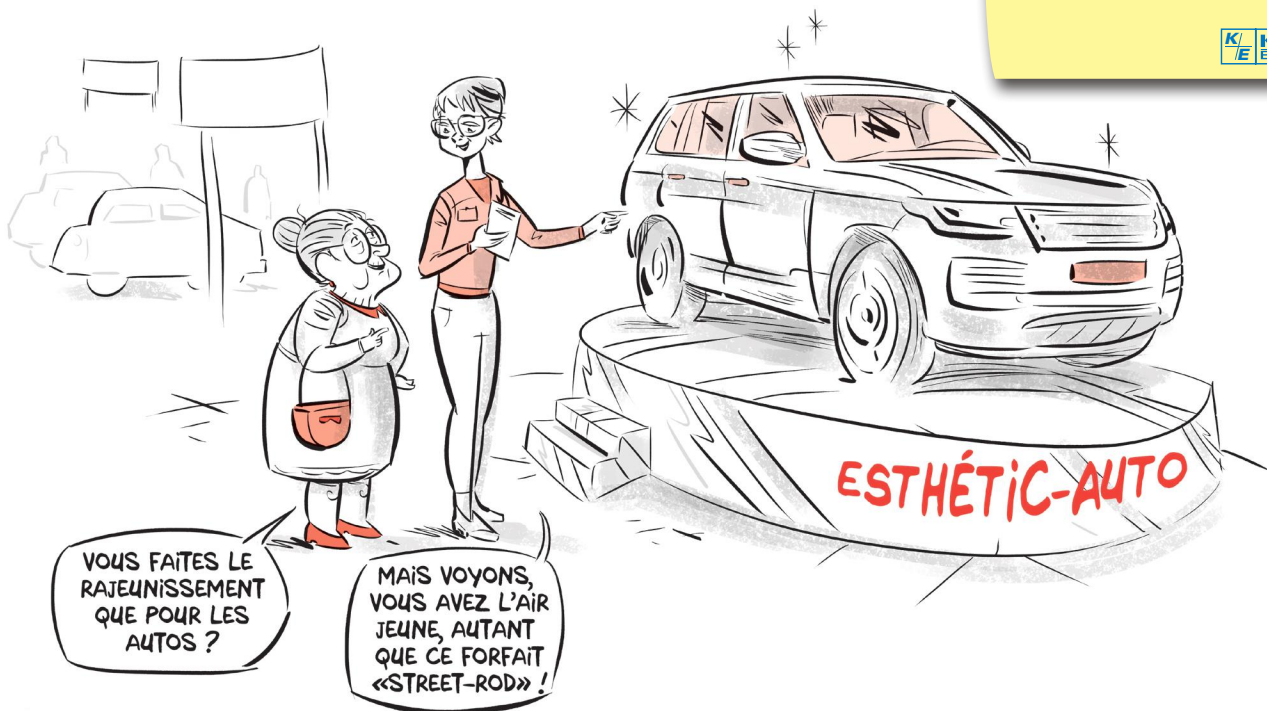
01. PROGRAMMATION LINÉAIRE

Dans ce module, vous serez initié à l'optimisation à l'aide de la programmation linéaire. Vous utiliserez vos connaissances arithmétiques et algébriques dans le but de résoudre des situations-problèmes comportant des contraintes représentant des limites liées à des situations de vie réelles, et qui se traduisent par des inéquations.

Mise en situation:

AU SALON DE L'AUTO

En début de chapitre, une mise en situation tirée de la vie courante réelle ou virtuelle qui illustre l'utilité de la matière qui sera abordée.



Pénélope, que tout le monde appelle Penny, se prépare à passer une fin de semaine dans un kiosque du salon de l'auto de la région de Victoriaville. Son employeur, propriétaire de l'entreprise *Esthétic-Auto*, offre un service d'esthétique automobile qui consiste à rajeunir l'apparence des voitures en modifiant les chromes, en ajoutant des accents de peinture, en changeant roues et pneus et en apportant certaines modifications à la carrosserie.

Le salon se tient vendredi soir de 17 h à 21 h, samedi après-midi, de 13 h à 17 h et dimanche après-midi, de 13 h à 17 h.

La mission de Penny au kiosque du salon de l'auto est de vendre deux produits : le forfait « accent » et le forfait « révision totale » appelé « street-rod ».

Le forfait accent est le plus rentable pour *Esthétic-Auto*, car il est le plus rapide et le plus simple des deux ensembles. Il consiste à plastifier certains chromes, à ajouter des accents de peinture à des endroits stratégiques et à changer roues et pneus pour donner à la voiture une allure plus sportive.

Le forfait « street-rod » est beaucoup plus complexe et demande plus de temps que le premier forfait. Il consiste à modifier les chromes, à changer les freins, les roues et les pneus et, bien souvent, à changer la couleur de la voiture.

Comme le contrat est assez long à signer, Penny s'attend à vendre, en moyenne, au plus un forfait par heure, et compte sur son beau sourire et son entregent pour en vendre au moins un toutes les deux heures. Elle prévoit également vendre au moins autant de forfaits accent que de forfaits « street-rod », mais pas plus de deux fois plus.

Son patron a promis à Penny une prime sur chaque vente qu'elle fera au salon de l'auto : 70 \$ sur chaque forfait accent et 250 \$ sur un forfait « street-rod ».

Dans de telles conditions, sauriez-vous dire combien de forfaits de chaque type Penny devrait vendre au salon de l'auto pour empocher la plus grosse prime possible ?

Comment être certain que la solution retenue soit la bonne ? Vous verrez, dans ce module, tous les outils qu'il faut pour optimiser cette situation et beaucoup d'autres.

Le bloc Dans ce chapitre vous indique les nouvelles notions que vous apprendrez et quelles seront leurs utilités en mathématiques et dans la vie de tous les jours.



DANS CE MODULE

Quoi de nouveau ?

- La programmation linéaire

Qu'est-ce que c'est ?

- La programmation linéaire est une méthode permettant d'optimiser une fonction linéaire dans une situation soumise à des contraintes qui se traduisent par des inéquations linéaires.

À quoi ça sert en mathématiques ?

- La programmation linéaire sert à modéliser et à résoudre des situations-problèmes liées à l'optimisation. La programmation linéaire est une branche des mathématiques qui a pour but de trouver la solution qui optimise (maximise ou minimise) une fonction linéaire dans des situations soumises à des contraintes qui se traduisent par des inéquations linéaires.

À quoi ça servira dans la vie ?

- Optimiser une situation permet de prendre des décisions, que ce soit pour minimiser les coûts ou maximiser les profits, notamment dans la planification et le contrôle de la production et dans divers secteurs d'activités.

1.1. Résolution algébrique d'un système à deux inconnues

Le chapitre est divisé en sections.



- VOUS CONNAISSEZ TROIS MÉTHODES DE RÉOLUTION ALGÈBRE D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES: COMPARAISON, SUBSTITUTION ET ÉLIMINATION. VOICI UNE OCCASION DE RÉVISER CES TROIS MÉTHODES.



SM-3

Les outils mathématiques nécessaires à l'acquisition des savoirs mathématiques: **SM**.



Outils mathématiques

Méthode de comparaison – Méthode de substitution – Méthode d'élimination

1. Méthode de comparaison

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode de comparaison** consiste à isoler la même variable dans les deux équations et à comparer les deux expressions obtenues pour trouver le couple-solution du système.

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux variables par la **méthode de comparaison**, on suit les étapes suivantes:

On **isole** la même variable dans chacune des équations;

On **compare** les expressions déterminées pour cette variable afin d'obtenir une équation comportant uniquement l'autre variable;

On **résout** l'équation obtenue;

On **calcule** la valeur de l'autre variable en remplaçant la variable déterminée précédemment par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations du système;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations initiales.

Exemple

À l'aide de la méthode de comparaison, résoudre le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

On **isole** la même variable dans chacune des équations. Isoler

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{-x + 7}{2} \end{cases}$$

On **compare** les deux expressions obtenues.

Le **y** de la **première équation** = le **y** de la **deuxième équation**

$$-2x + 8 = \frac{-x + 7}{2}$$

Cet outil comprend des exemples, des démarches détaillées et leurs résolutions.





Outils mathématiques suite

On **résout** l'équation :

$$\begin{aligned}
2(-2x + 8) &= -x + 7 \\
-4x + 16 &= -x + 7 \\
-4x + x &= 7 - 16 \\
-3x &= -9 \\
x &= \frac{-9}{-3} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{3}
\end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de l'autre variable, y , en substituant à x la valeur 3 dans l'une ou l'autre des équations obtenues à la première étape :

$$\begin{aligned}
y &= -2x + 8 \\
y &= -2 \cdot \mathbf{3} + 8 \\
y &= -6 + 8 \\
\mathbf{y} &= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-x + 7}{2} \\
y &= \frac{-\mathbf{3} + 7}{2} \\
y &= \frac{4}{2} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

Le couple-solution du système est **(3, 2)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$$\begin{aligned}
2x + y &= 8 \\
2 \cdot \mathbf{3} + \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 8 \\
6 + \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 8 \\
\mathbf{8} &\stackrel{?}{=} \mathbf{8} \rightarrow \mathbf{Vrai}
\end{aligned}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned}
x + 2y &= 7 \\
\mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} 7 \\
3 + 4 &\stackrel{?}{=} 7 \\
\mathbf{7} &\stackrel{?}{=} \mathbf{7} \rightarrow \mathbf{Vrai}
\end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on conclut que le couple **(3, 2)** est bien la **solution** du système d'équations.

2. Méthode de substitution

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode de substitution** consiste à isoler une variable dans l'une ou l'autre des équations et à substituer cette expression dans l'autre équation par cette expression, puis à résoudre l'équation.

Pour **résoudre un système** d'équations du premier degré à deux inconnues par la méthode de substitution, on suit les étapes suivantes :

On **isole** une variable dans l'une des deux équations pour obtenir une expression de cette variable ;

On **substitue** à cette même variable dans l'autre équation l'expression obtenue pour former une équation à une variable ;

On **résout** cette équation ;

Tous les termes apparaissant en italique rouge gras se retrouvent au glossaire des termes mathématiques.





Outils mathématiques suite

On **calcule** la valeur de l'autre variable en remplaçant la variable déterminée précédemment par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations du système ;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans chacune des équations de départ.

Exemple

À l'aide de la méthode de substitution, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

On **isole** la variable x dans la deuxième équation :

$$x + 3y = 2 \quad \rightarrow \quad x = -3y + 2$$

On **substitue** cette expression à la variable x dans l'autre équation :

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 10 \\ 3(-3y + 2) + 5y &= 10 \end{aligned}$$

On **résout** l'équation :

$$\begin{aligned} -9y + 6 + 5y &= 10 \\ -4y &= 10 - 6 \\ -4y &= 4 \\ y &= \frac{4}{-4} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de la variable x :

$$\begin{aligned} x &= -3y + 2 \\ x &= -3 \cdot (-1) + 2 \\ x &= 3 + 2 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

Le couple-solution est **(5, -1)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables x et y par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 10 \\ 3 \cdot \mathbf{5} + 5 \cdot (-\mathbf{1}) &\stackrel{?}{=} 10 \\ 15 - 5 &\stackrel{?}{=} 10 \\ \mathbf{10} &\stackrel{?}{=} \mathbf{10} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Vrai} \end{aligned}$$

Deuxième équation :

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ \mathbf{5} + 3 \cdot (-\mathbf{1}) &\stackrel{?}{=} 2 \\ 5 - 3 &\stackrel{?}{=} 2 \\ \mathbf{2} &\stackrel{?}{=} \mathbf{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Vrai} \end{aligned}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on conclut que le couple **(5, -1)** est bien la **solution** du système d'équations.





Outils mathématiques suite

3. Méthode d'élimination

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode d'élimination** consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations d'un système, ou deux équations équivalentes, puis à résoudre l'équation restante.

Pour **résoudre un système** d'équations du premier degré à deux variables par la méthode d'élimination, on suit les étapes suivantes :

On **transforme**, s'il y a lieu, les équations sous la forme $Ax + By = C$;

On **exprime**, s'il y a lieu, en nombres entiers les coefficients fractionnaires ou décimaux;

On **choisit** la variable à éliminer;

On **transforme** les équations du système en des équations équivalentes dans lesquelles les coefficients de la variable à éliminer sont opposés;

On **additionne** les deux équations ainsi transformées;

On **résout** l'équation obtenue;

On **substitue** la valeur trouvée à la variable dans l'une ou l'autre des équations, puis on calcule la valeur de l'autre variable;

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations d'origine.

Exemple

À l'aide de la méthode d'élimination, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 5y = 18 \end{cases}$$

Ici, l'addition des deux équations données n'est pas suffisante pour trouver la solution du système d'équations, car elle ne permet pas l'élimination d'une variable. On doit préalablement multiplier chacune des deux équations par un nombre pour obtenir des coefficients opposés pour l'une des deux variables. On **choisit**, par exemple, d'éliminer la variable x . On détermine le P.P.C.M. (le plus petit commun multiple) des **coefficients 3 et 2** qui est **6**.

On **transforme** les équations du système en des équations équivalentes dans lesquelles les coefficients de la variable à éliminer sont opposés. On multiplie, par exemple, la première équation par 2 et la seconde par -3 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 & (\times 2) \\ 2x - 5y = 18 & (\times -3) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ -6x + 15y = -54 \\ \hline 19y = -38 \\ y = \frac{-38}{19} \\ \mathbf{y = -2} \end{cases}$$



**Outils mathématiques suite**

On substitue à y la valeur -2 dans l'une ou l'autre des équations d'origine pour calculer la valeur de x :

$$\begin{array}{lcl} 3x + 2y = 8 & \text{ou} & 2x - 5y = 18 \\ 3x + 2 \cdot (-2) = 8 & & 2x - 5 \cdot (-2) = 18 \\ 3x - 4 = 8 & & 2x + 10 = 18 \\ 3x = 8 + 4 & & 2x = 18 - 10 \\ 3x = 12 & & 2x = 8 \\ x = \frac{12}{3} & & x = \frac{8}{2} \\ \mathbf{x = 4} & & \mathbf{x = 4} \end{array}$$

Le couple-solution est **(4, -2)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales:

Première équation :

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 3 \cdot \mathbf{4} + 2 \cdot (-2) \stackrel{?}{=} 8 \\ 12 - 4 \stackrel{?}{=} 8 \\ \mathbf{8 \stackrel{?}{=} 8} \rightarrow \mathbf{Vrai} \end{array}$$

Deuxième équation :

$$\begin{array}{l} 2x - 5y = 18 \\ 2 \cdot \mathbf{4} - 5 \cdot (-2) \stackrel{?}{=} 18 \\ 8 + 10 \stackrel{?}{=} 18 \\ \mathbf{18 \stackrel{?}{=} 18} \rightarrow \mathbf{Vrai} \end{array}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(4, -2)** est bien la **solution** du système d'équations.

Si on appliquait cette théorie?

- DANS LES EXEMPLES SUIVANTS, VOUS RÉVISEREZ LES TROIS MÉTHODES ALGÈBRIQUES DE RÉOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES.

Exemple 1

On considère le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$$

Résoudre ce système d'équations par la méthode de

Solution

On **isole** la même variable dans chacune des équations. Isolons, par exemple, la variable y :

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x - y = 15 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 3x - 15 \end{cases}$$

On **compare** les deux expressions obtenues.

Le **y** de la **première équation** = le **y** de la **deuxième équation**

$$-2x + 5 = 3x - 15$$

On **résout** l'équation:

$$\begin{aligned} -2x + 5 &= 3x - 15 \\ -2x - 3x &= -15 - 5 \\ -5x &= -20 \\ x &= \frac{-20}{-5} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

On **calcule** la valeur de l'autre variable, y , en substituant à x la valeur **4** dans l'une ou l'autre des équations obtenues à la première étape:

$$\begin{array}{ll} y = -2x + 5 & \text{ou} & y = 3x - 15 \\ y = -2 \cdot \mathbf{4} + 5 & & y = 3 \cdot \mathbf{4} - 15 \\ y = -8 + 5 & & y = 12 - 15 \\ \mathbf{y} = \mathbf{-3} & & \mathbf{y} = \mathbf{-3} \end{array}$$

Le couple-solution du système est **(4, -3)**.

Des cas concrets en relation avec les savoirs mathématiques. Celui-ci comprend au moins 2 exemples: Le premier est détaillé avec une démarche élaborée.



On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales :

Première équation :

$$y = -2x + 5$$

$$-3 \stackrel{?}{=} -2 \cdot 4 + 5$$

$$-3 \stackrel{?}{=} -8 + 5$$

$$-3 \stackrel{?}{=} -3 \rightarrow \text{Vrai}$$

Deuxième équation :

$$3x - y = 15$$

$$3 \cdot 4 - (-3) \stackrel{?}{=} 15$$

$$12 + 3 \stackrel{?}{=} 15$$

$$15 \stackrel{?}{=} 15 \rightarrow \text{Vrai}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(4, -3)** est bien la **solution** du système d'équations.

Exemple 2

Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2y - x = 11 \end{cases}$$

Solution

On **isole**, par exemple, la variable x dans la première équation :

$$x + y = 16 \rightarrow x = -y + 16$$

On **substitue** cette expression à la variable x dans l'autre équation :

$$2y - x = 11$$

$$2y - (-y + 16) = 11$$

On **résout** l'équation :

$$2y + y - 16 = 11$$

$$\boxed{} y - 16 = 11$$

$$3y = 11 + 16$$

$$3y = \boxed{}$$

$$y = \frac{27}{3}$$

$$y = 9$$

On **calcule** la valeur de la variable x :

$$x = -y + 16$$

$$x = -\boxed{} + 16$$

$$x = 7$$

Le couple-solution est **(7, 9)**.

Le deuxième exemple : à vous de démontrer votre savoir en effectuant la démarche proposée !

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système. On **remplace** les variables par leur valeur respective dans les équations initiales:

Première équation:

$$x + y = 16$$

$$7 + \boxed{} \stackrel{?}{=} 16$$

$$16 \stackrel{?}{=} 16 \rightarrow \text{Vrai}$$

Deuxième équation:

$$2y - x = 11$$

$$2 \cdot 9 - \boxed{} \stackrel{?}{=} 11$$

$$\boxed{} - 7 \stackrel{?}{=} 11$$

$$11 = 11 \rightarrow \text{Vrai}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(7, 9)** est bien la **solution** du système d'équations.

Exemple 3

Résoudre le système d'équations suivant par la méthode d'élimination:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 1 - \frac{2y}{3} \\ -1,2y = 6 - 0,4x \end{cases}$$

Solution

On **transforme** les équations sous la forme $Ax + By = C$.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 1 - \frac{2y}{3} \\ -1,2y = 6 - 0,4x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 1 \\ \boxed{}x - 1,2y = 6 \end{cases}$$

Troisième exemple:
Encore + de pratique!



On **exprime** en nombres entiers les coefficients fractionnaires ou décimaux.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 1 \\ 0,4x - 1,2y = 6 \quad (\times 10) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x + 4y}{6} = \frac{6}{6} \\ \boxed{}x - \boxed{}y = 60 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x + \boxed{}y = 6 \\ 4x - 12y = 60 \end{cases}$$

On **choisit** la variable à éliminer. Choisissons ici d'éliminer la variable y .

On transforme les équations du système en deux équations équivalentes dans lesquelles les **coefficients** de la variable y sont **opposés**. On multiplie donc la première équation par 3 et la seconde par 1.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \quad (\times 3) \\ 4x - 12y = 60 \quad (\times 1) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \boxed{}x + 12y = 18 \\ 4x - \boxed{}y = 60 \end{cases}$$



On **additionne** les deux équations ainsi transformées.

$$\begin{cases} 9x + 12y = 18 \\ 4x - 12y = 60 \end{cases}$$

$$13x = \boxed{}$$
$$x = \frac{78}{13}$$
$$x = \boxed{}$$

On **substitue** la valeur 6 à la variable x dans l'une ou l'autre des équations.

$$3x + 4y = 6$$
$$3 \cdot \boxed{} + 4y = 6$$
$$\boxed{} + 4y = 6$$
$$4y = 6 - 18$$
$$4y = \boxed{}$$
$$y = \frac{-12}{4}$$
$$y = \boxed{}$$

On obtient le couple-solution **(6, -3)**.

On **vérifie** que le couple trouvé est bien la solution du système en remplaçant les variables par leur valeur respective dans les équations d'origine.

Première équation :

$$\frac{x}{2} = 1 - \frac{2y}{3}$$
$$\frac{6}{2} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{2 \cdot (-3)}{3}$$
$$3 \stackrel{?}{=} 1 - \boxed{}$$
$$3 \stackrel{?}{=} 3 \rightarrow \text{Vrai}$$

Deuxième équation :

$$-1,2y = 6 - 0,4x$$
$$-1,2 \cdot (\boxed{}) \stackrel{?}{=} 6 - 0,4 \cdot 6$$
$$3,6 \stackrel{?}{=} 6 - \boxed{}$$
$$3,6 \stackrel{?}{=} 3,6 \rightarrow \text{Vrai}$$

Puisque les deux équations sont vérifiées, on peut conclure que le couple **(6, -3)** est bien la **solution** du système d'équations.

Maintenant que vous avez révisé les trois méthodes algébriques de résolution des systèmes d'équations, il ne vous reste plus qu'à vous exercer dans les **Activités d'apprentissage** que voici.

1. Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode algébrique de votre choix.

$$a) \begin{cases} 2x - 3 = y \\ x - 2y = 9 \end{cases}$$

Des activités d'apprentissage afin de vous pratiquer à acquérir par étapes la ou les compétences disciplinaires.



$$b) \begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases}$$

De l'espace fourni afin de vous faciliter la tâche en écrivant à même le module! Aucune feuille volante!



$$c) \begin{cases} x = 12y + 5 \\ x = 5y + 12 \end{cases}$$

Une mention tout au bas vous indique à quelle page vous trouverez le corrigé afin de vous vérifier.



1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

Nous arrivons à la fin du chapitre traitant d'optimisation par programmation linéaire. Avant de vous attaquer aux **Situations-problèmes** plus globales qui vont conclure ce chapitre, voici un résumé des *savoirs mathématiques* que vous avez acquis jusqu'ici.

Résumé des savoirs mathématiques

Résolution d'un système d'équations

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode d'égalité** consiste à isoler la même variable dans les deux équations et à comparer les expressions obtenues pour trouver le couple-solution du système.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode de substitution** consiste à isoler une variable dans l'une ou l'autre des équations du système, puis à substituer cette expression dans l'autre équation par cette expression, puis à résoudre l'équation ainsi obtenue.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la **méthode d'élimination** consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations d'un système, ou deux équations équivalentes, puis à résoudre l'équation restante.

Représentation graphique de l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables

Un **système d'inéquations du premier degré à deux variables** admet généralement une infinité de solutions qui sont représentées par une région du plan cartésien. Cette région correspond à la région-solution commune à toutes les inéquations du système.

Représentation algébrique des contraintes

Les **contraintes** sont des limitations imposées aux variables dans une situation donnée. Ces limitations sont imposées soit par le temps, l'espace, le budget ou simplement par la volonté. Elles se traduisent par un système d'inéquations.

Les expressions « au moins », « pas moins que », « au minimum », « un minimum de », « est supérieur ou égal à », etc. se traduisent par le symbole \geq .

Les expressions « au plus », « pas plus que », « au maximum », « un maximum de », « est inférieur ou égal à », « est limité à », « ne doit pas dépasser », « ne doit pas excéder », etc. se traduisent par le symbole \leq .

Les expressions « plus que », « est supérieur à », « dépasse », « excède », etc. se traduisent par le symbole $>$.

Les expressions « moins que », « est inférieur à », etc. se traduisent par le symbole $<$.

Représentation graphique des contraintes

La région-solution de l'ensemble des contraintes d'une situation se nomme le **polygone de contraintes**. L'ensemble de tous les points du polygone de contraintes est l'ensemble-solution du système d'inéquations formé par les contraintes.

Fonction objectif

Dans un problème d'optimisation, on appelle **fonction objectif** ou **fonction économique** la **fonction à optimiser**, c'est-à-dire l'expression qu'on cherche à maximiser ou à minimiser.

Ajout d'une contrainte à un problème d'optimisation

L'ajout d'une contrainte à un problème d'optimisation peut avoir un effet sur la solution du problème. Pour évaluer l'effet d'une nouvelle contrainte sur la solution d'un problème d'optimisation, on évalue la fonction objectif avant l'ajout de la contrainte en chacun des sommets du polygone de contraintes, puis on évalue de nouveau la fonction objectif avec l'ajout de la contrainte en chacun des sommets du nouveau polygone de contraintes. On compare les deux valeurs optimales ainsi obtenues.

Un résumé des savoirs mathématiques de ce chapitre vous est présenté.



Consolidation des savoirs

1. Résoudre algébriquement les systèmes d'équations suivants par la méthode de votre choix.

$$\text{a) } \begin{cases} y = 8x - 32 \\ 5x - 20 = y \end{cases}$$

Des consolidations des savoirs vous sont offertes afin de mieux les maîtriser.



$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 5y = 56 \\ y = -6x + 16 \end{cases}$$

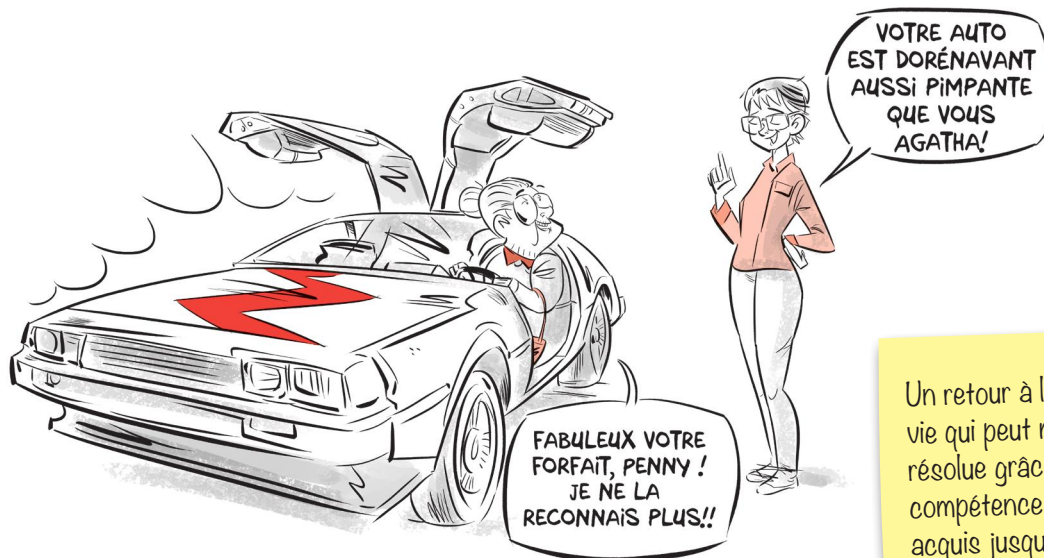
$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 8y = 19 \\ -4x - 5y = -4 \end{cases}$$

1.7. Situations de vie

Au salon de l'auto de Victoriaville, Penny vend des forfaits pour son patron, propriétaire de l'entreprise Esthétic-Auto, un atelier d'esthétique automobile.

Retour à la mise en situation:

L'OPTIMISATION AU SERVICE DE L'ESTHÉTIQUE AUTOMOBILE



Un retour à la situation de vie qui peut maintenant être résolue grâce aux savoirs et compétences que vous avez acquis jusqu'à présent.



1. Au salon de l'auto.

Le salon de l'auto de Victoriaville se tient vendredi soir de 17 h à 21 h, samedi après-midi de 13 h à 17 h et dimanche après-midi de 13 h à 17 h.

La mission de Penny à son kiosque du salon de l'auto est de vendre deux produits :

le forfait « accent » et le forfait « révision totale » appelé « street-rod ».

Comme le contrat est assez long à signer, Penny s'attend à vendre au plus un forfait par heure, et compte sur son beau sourire et son entregent pour en vendre au moins un par deux heures. Elle prévoit également vendre au moins autant de forfaits accent que de forfaits « street-rod », mais pas plus de deux fois plus.

Son patron a promis à Penny une prime sur chaque vente qu'elle fera au salon de l'auto :

70 \$ sur chaque forfait accent et 250 \$ sur un forfait « street-rod ».

1^{re} tâche

Sauriez-vous dire combien Penny doit vendre de forfaits de chaque type pour maximiser sa prime, tout en tenant compte des contraintes de la situation ?

Nous vous suggérons ici une démarche qui vous permettra de trouver la solution d'un problème d'optimisation.

1^{re} étape : Traduction du problème en langage mathématique, c'est-à-dire :

On **identifie** d'abord les variables ;

On **pose**, sous forme d'inéquation, chacune des contraintes auxquelles doivent obéir les variables ;

On **pose** l'expression de Z , la fonction objectif.

On identifie les variables : les variables x et y représentent les valeurs qu'on doit trouver pour procéder à l'optimisation de la fonction Z , qu'on appelle **fonction objectif** ou **fonction économique**.

x : _____

y : _____

Z : _____

Toujours de l'espace
fourni afin d'écrire
vos développements !



Passons maintenant aux contraintes. Dans tout problème d'optimisation, deux contraintes sont toujours présentes ; on les appelle les **contraintes de non-négativité**.

Le nombre de forfaits vendus par Penny ne peut en effet être un nombre négatif :

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Penny s'attend à vendre **au plus un forfait par heure**.

Le salon de l'auto de Victoriaville se tient vendredi soir de 17 h à 21 h, samedi après-midi de 13 h à 17 h et dimanche après-midi de 13 h à 17 h. Comptez d'abord le nombre d'heures que passera Penny à son kiosque, puis traduisez l'affirmation en langage mathématique.

Penny compte sur son beau sourire et son entregent pour vendre **au moins un forfait toutes les deux heures**.

Traduisez cette affirmation en langage mathématique.

Elle s'attend également à vendre **au moins autant de forfaits accent que de forfaits «street-rod»**, mais **pas plus de deux fois plus**. Écrivez les deux contraintes qui traduisent cette affirmation.

On détermine l'expression de la fonction objectif, c'est-à-dire la fonction à optimiser. Dans cette situation, la prime de Penny est obtenue en additionnant la prime sur ses ventes de forfaits accents et sur ses ventes de forfaits «street-rod» :

$$Z = \underline{\hspace{10cm}}$$

2^e étape : Analyse graphique des contraintes, c'est-à-dire :

On **trace** le polygone de contraintes correspondant au système d'inéquations déterminé précédemment :



Des éléments graphiques,
tel qu'ici une grille
vous évitant les feuilles
quadrillées volantes.



On calcule ensuite les coordonnées des sommets du polygone de contraintes.

On peut identifier les quatre sommets du polygone A, B, C et D pour simplifier les notations.

Désignons par A le point de rencontre des droites $x = y$ et $x + y = 6$.
Calculez ici les coordonnées du point A:

Toujours de l'espace pour
écrire vos développements
tout au long des étapes!



Désignons par B le point de rencontre des droites $x = y$ et $x + y = 12$.
Calculez ici les coordonnées du point B:

Désignons par C le point de rencontre des droites $x = 2y$ et $x + y = 12$.
Calculez ici les coordonnées du point C:

Désignons par D le point de rencontre des droites $x = 2y$ et $x + y = 6$.
Calculez ici les coordonnées du point D:

3^e étape: Recherche des valeurs des variables x et y qui optimisent la fonction Z, c'est-à-dire:

On **calcule** la valeur de la fonction Z pour chacun des sommets du polygone de contraintes;

On **choisit** les valeurs des variables x et y qui optimisent la fonction Z de la façon désirée.

Analyse des sommets du polygone de contraintes

Pour chacun des sommets dont vous avez calculé les coordonnées à l'étape précédente, vous devez évaluer la prime de Penny:

Sommet	$Z = 70x + 250y$	Prime
A (<input type="text"/> , <input type="text"/>)	$Z = 70 \cdot \text{ } + 250 \cdot \text{ }$	<input type="text"/>
B (<input type="text"/> , <input type="text"/>)	$Z = 70 \cdot \text{ } + 250 \cdot \text{ }$	<input type="text"/>
C (<input type="text"/> , <input type="text"/>)	$Z = 70 \cdot \text{ } + 250 \cdot \text{ }$	<input type="text"/>
D (<input type="text"/> , <input type="text"/>)	$Z = 70 \cdot \text{ } + 250 \cdot \text{ }$	<input type="text"/>

Il ne reste plus qu'à sélectionner la valeur la plus élevée dans la colonne des primes et à énoncer pour quelles valeurs de x et y on obtient cette prime maximale.



1. Au Palais du Gourmet.

Sabrina a récemment réalisé un rêve d'enfance : elle a ouvert un petit café dans un quartier huppé. Elle a appelé son petit commerce *Au Palais du Gourmet*. Sa spécialité est le gâteau au chocolat.



Son gâteau individuel qui est recouvert d'une montagne de crème glacée à la vanille, de sauce au chocolat chaude et d'une grosse cerise juteuse, se vend 8,50 \$ et se mange la plupart du temps sur place.

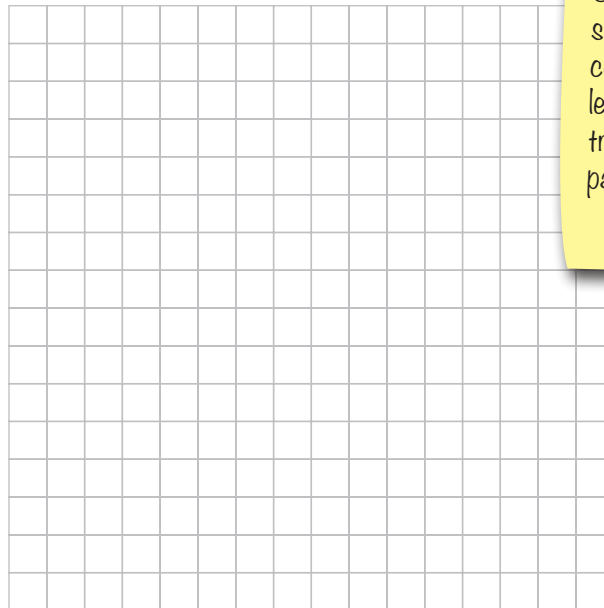
Pour prolonger le plaisir, Sabrina offre à sa clientèle son gros gâteau de type familial à 22 \$.

Sabrina confectionne toujours au moins autant de petits gâteaux que de gros.

Comme Sabrina possède peu de gros moules, elle ne prépare jamais plus de 40 gros gâteaux par jour.

Pour assurer la fraîcheur de ses pâtisseries, elle ne confectionne jamais plus de 100 gâteaux par jour.

Combien de gâteaux de chaque format Sabrina doit-elle préparer chaque jour pour maximiser le montant de ses ventes ?



Ces situations-problèmes sont plus globales et plus complexes afin de maîtriser les compétences transversales visées par ce module.



Des pages complètes vides
vous permettant d'écrire de
plus longs développements!



Pour conclure ce module

Pour terminer ce module, traitant d'**optimisation par programmation linéaire**, et pour vous assurer que vous maîtrisez bien les notions que vous y avez découvertes, vous traiterez maintenant des **SÉ**. Les solutions de ces situations ne sont pas dans votre module : votre enseignante ou votre enseignant en fera la correction.

Avant d'aborder ces **SÉ**, nous vous recommandons de noter, sur une feuille, les formules, les énoncés et même des exemples que vous jugez importants. Vous pouvez utiliser cette feuille comme aide-mémoire.

Assurez-vous de présenter une solution claire et complète. Vous ne devez demander l'aide de personne. Ce qui vous permettra de vous évaluer, et de connaître les exigences et les attentes de fin d'étape. Ce faisant, vous pourrez, si vous constatez certaines lacunes, les corriger avant de poursuivre.

Cette auto-évaluation vous permettra aussi de savoir si vous répondez aux attentes fixées pour ce module MAT 5170.

Une banque de situations-problèmes supplémentaires vous permettra d'augmenter encore plus vos compétences en seconde partie du **Prêt pour l'évaluation de fin de module ?**.

Bon travail !

Ces situations d'évaluation se trouvent à la fin du chapitre et sont divisées en 2 parties. Votre enseignant(e) en fera la correction.



01 PREMIÈRE PARTIE

Évaluation des connaissances

1. On considère...

Ces situations d'évaluation vous permettent de vérifier l'acquisition des connaissances et des compétences dites transversales.



01 DEUXIÈME PARTIE

Évaluation des compétences

5. Le téléthon.

Dans le cadre...

Félicitations, vous êtes près de la fin, le questionnaire qui suit a été préparé pour vous permettre d'évaluer vos forces et vos faiblesses dans ce module. Le corrigé de ce questionnaire ne se trouve pas dans votre module. Votre enseignant en fera la correction.

La première partie de ce questionnaire porte sur les savoirs mathématiques de ce cours. Dans la deuxième partie de cette rubrique, vous trouverez dix situations-problèmes pour démontrer vos compétences liées à ce module : utiliser des stratégies de résolution de situations-problèmes et déployer un raisonnement mathématique. Bonne révision !

PREMIÈRE PARTIE**Révision des connaissances****1. Résoudre...**

Cette section est constituée de 2 banques d'exercices dont votre enseignant(e) en fera la correction : ceci dans le but d'évaluer vos forces et vos faiblesses.

**DEUXIÈME PARTIE****Révision des compétences**

Voici enfin le dernier virage avant l'examen : une banque de 10 situations-problèmes portant sur l'optimisation en contexte fondamental. Faites-en bon usage!

1. Les promesses de Martin le malin.

C'est vendredi...

contrainte

Une contrainte est une limitation à laquelle sont soumises les variables de la fonction objectif. Dans un problème d'optimisation, les contraintes se traduisent par des inéquations.

contrainte de non-négativité

Une contrainte de non-négativité est une contrainte qui indique qu'une variable ne peut prendre de valeur négative.
Par exemple : $x \geq 0$ ou $y \geq 0$.

fonction économique

La fonction économique est la fonction à optimiser d'un problème d'optimisation. C'est l'expression que l'on veut minimiser ou maximiser par la résolution du problème. Elle est généralement de la forme $Z = Ax + By + C$.

fonction objectif

La fonction objectif est la fonction à optimiser d'un problème d'optimisation. C'est l'expression que l'on veut minimiser ou maximiser par la résolution du problème. Elle est généralement de la forme $Z = Ax + By + C$.

méthode d'élimination

La méthode d'élimination permet de résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux variables. Cette méthode consiste à éliminer l'une ou l'autre des deux variables en additionnant les deux équations du système pour obtenir une équation à une variable qui en résulte.

méthode de comparaison

La méthode de comparaison permet de résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux variables. Cette méthode consiste à isoler la même variable (soit la variable y ou la variable x) dans les deux équations, à poser une égalité entre les deux expressions équivalentes et à résoudre l'équation à une variable.

méthode de substitution

La méthode de substitution permet de résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux variables. Cette méthode consiste à isoler une variable (soit la variable y ou la variable x) dans l'une ou l'autre des équations du système, à remplacer cette variable dans l'autre équation par cette expression, puis de résoudre l'équation à une variable ainsi obtenue.

1.1. Résolution algébrique d'un système de deux équations à deux inconnues

1. p. 13

a) Par substitution:

$$\begin{cases} 2x - 3 = y \\ x - 2y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 9 \\ x - 2(2x - 3) &= 9 \\ x - 4x + 6 &= 9 \\ -3x &= 9 - 6 \end{aligned}$$

$$-3x = 3$$

$$x = \frac{3}{-3}$$

$$x = -1$$

Le couple-solution est (-1, -5).

$$2 \cdot (-1) - 3 = y$$

$$-2 - 3 = y$$

$$y = -5$$

b) Par élimination:

$$\begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases} \begin{matrix} (\times 1) \\ (\times -2) \end{matrix} \leftrightarrow \begin{cases} 5x - 12y = 22 \\ -14x + 12y = -40 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -9x & = & -18 \end{matrix}$$

$$x = \frac{-18}{-9}$$

$$x = 2$$

$$\begin{aligned} 5x - 12y &= 22 \\ 5 \cdot 2 - 12y &= 22 \\ 10 - 12y &= 22 \\ -12y &= 22 - 10 \\ -12y &= 12 \end{aligned}$$

$$y = \frac{12}{-12}$$

$$y = -1$$

Le couple-solution est (2, -1).

c) Par comparaison:

$$\begin{cases} x = 12y + 5 \\ x = 5y + 12 \end{cases} \rightarrow 12y + 5 = 5y + 12$$

$$\begin{aligned} 12y + 5 &= 5y + 12 \\ 12y - 5y &= 12 - 5 \end{aligned}$$

$$7y = 7$$

$$y = \frac{7}{7}$$

$$y = 1$$

Le couple-solution est (17, 1).

$$x = 12y + 5$$

$$x = 12 \cdot 1 + 5$$

$$x = 12 + 5$$

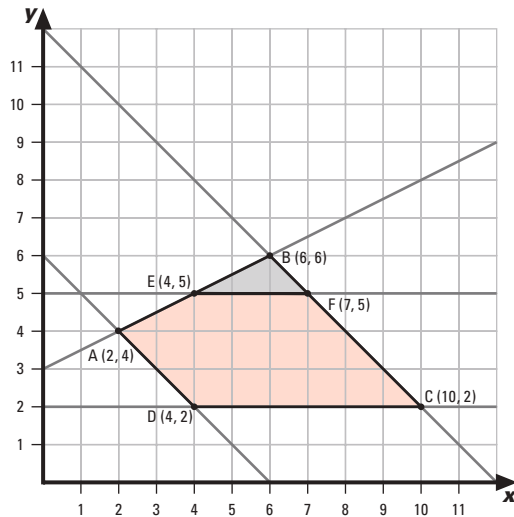
$$x = 17$$

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Activités d'apprentissage.



10. p. 57 suite

c) Nouveau polygone de contraintes :



Analyse des sommets du nouveau polygone de contraintes :

Sommet	$Z = 12x + 8y$	Valeur de Z
A (2, 4)	$Z = 12 \cdot 2 + 8 \cdot 4$	56
C (10, 2)	$Z = 12 \cdot 10 + 8 \cdot 2$	136
D (4, 2)	$Z = 12 \cdot 4 + 8 \cdot 2$	64
E (4, 5)	$Z = 12 \cdot 4 + 8 \cdot 5$	88
F (7, 5)	$Z = 12 \cdot 7 + 8 \cdot 5$	124

La valeur maximale de Z est 136.**L'ajout de la contrainte n'a pas d'effet sur la fonction objectif.**

1.6. Vue d'ensemble : synthèse des savoirs

1. p. 62

a) Par comparaison :

$$\begin{cases} y = 8x - 32 \\ 5x - 20 = y \end{cases} \rightarrow 8x - 32 = 5x - 20$$

$$8x - 32 = 5x - 20$$

$$8x - 5x = -20 + 32$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

Le couple-solution est (4, 0).

$$y = 8x - 32$$

$$y = 8 \cdot 4 - 32$$

$$y = 32 - 32$$

$$y = 0$$

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Consolidations des savoirs.

1.7. Situations de vie

1. Au salon de l'auto.

p. 68

1^{re} tâche

Identification des variables :

 x : Le nombre de forfaits accent y : Le nombre de forfaits « street-rod » Z : Le montant de la prime de Penny

Traduction des contraintes en inéquations :

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \leq 12$

$x + y \geq 6$

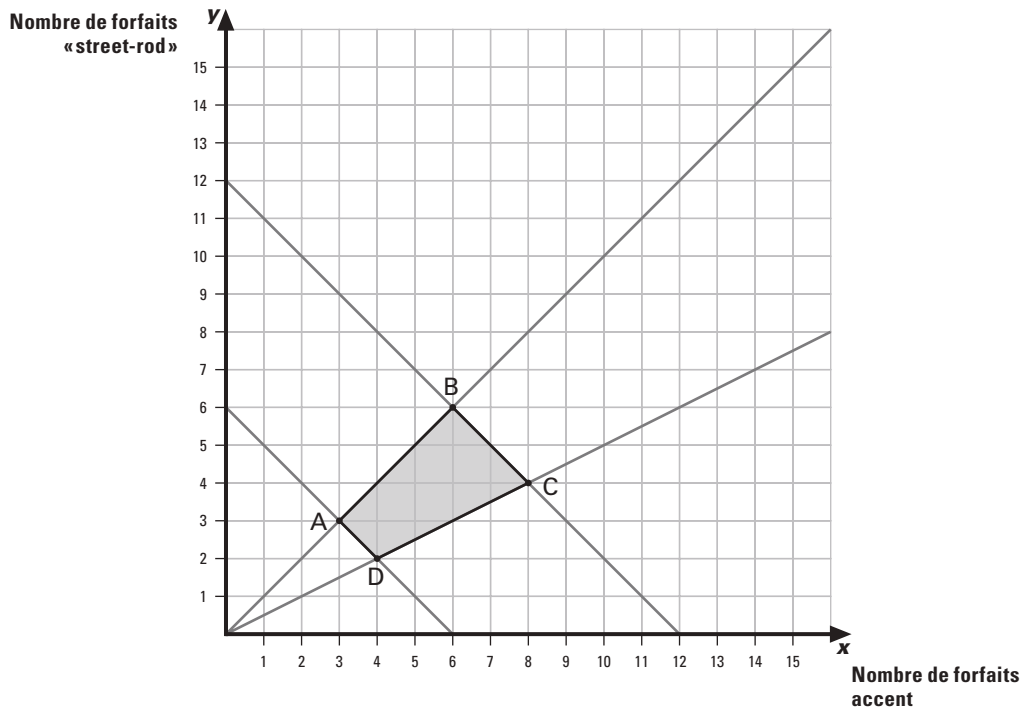
$x \geq y$

$x \leq 2y$

Fonction objectif :

$Z = 70x + 250y$

Tracé du polygone de contraintes :



Calcul des coordonnées des sommets du polygone de contraintes :

Coordonnées du point A :

$$\begin{cases} x = y \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Par substitution, on obtient :

$x + x = 6$

$2x = 6$

$x = \frac{6}{2}$

$x = y$

$x = 3$

$3 = y$

Les coordonnées du point A sont (3, 3).

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Situations de vie.

1. Au Palais du Gourmet.

p. 76

Identification des variables:

x : le nombre de petits gâteaux
 y : le nombre de gros gâteaux
 Z : le montant des ventes par jour

Contraintes:

$x \geq 0$
 $y \geq 0$
 $x \geq y$
 $y \leq 40$
 $x + y \leq 100$

Fonction objectif: $Z = 8,50x + 22y$ **Polygone de contraintes:****Analyse des sommets du polygone de contraintes:**

Sommet	$Z = 8,50x + 22y$	Montant des ventes
A (0, 0)	$Z = 8,50 \cdot 0 + 22 \cdot 0$	0 \$
B (40, 40)	$Z = 8,50 \cdot 40 + 22 \cdot 40$	1 220 \$
C (60, 40)	$Z = 8,50 \cdot 60 + 22 \cdot 40$	1 390 \$
D (100, 0)	$Z = 8,50 \cdot 100 + 22 \cdot 0$	850 \$

En confectionnant 60 petits gâteaux et 40 gros gâteaux, le montant des ventes est maximal à 1 390 \$.

Un corrigé aéré, élaboré avec une démarche détaillée, qui vous permet de vous vérifier de façon autonome, pour toutes les Situations-problèmes.

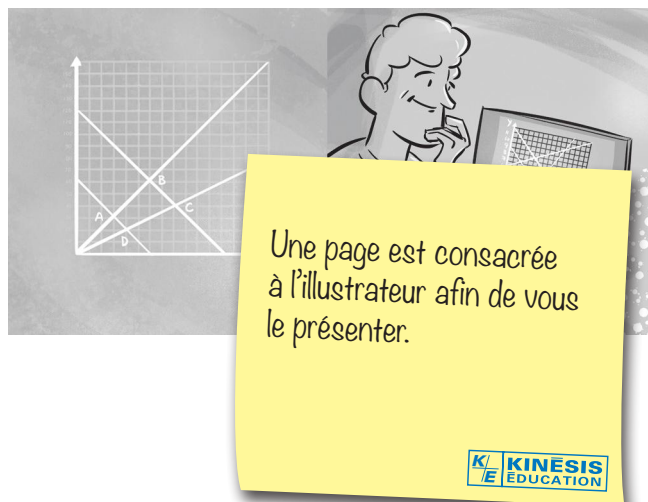


MOTS	CHAPITRE 1
Contrainte	34, 35, 36, 37, 38, 39, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 61
Contrainte de non-négativité	36, 37, 38
Fonction objectif	47, 50, 51, 61
Polygone de contraintes	35, 36, 37, 38, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 61

Une table alphabétique
des mots clés
et leurs références.

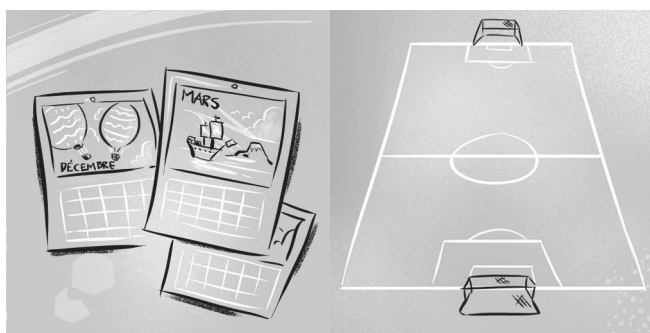
À propos de l'illustrateur et des illustrations...

Les illustrations des couvertures et les illustrations que vous trouverez au fil des pages de ce module sont des illustrations originales, commandées pour notre collection à Paul Bordeleau, illustrateur québécois, auteur de bandes dessinées et illustrateur-éditorialiste pour l'hebdomadaire *Voir* de 1992 à 2004, et pour le journal *La Presse* en 2001 et 2002. En 2003, il a pris la relève de Garnotte et de Gité comme illustrateur de nos collections.



Une page est consacrée à l'illustrateur afin de vous le présenter.

KINÉSIS
ÉDUCATION



En 2009, il était l'un des bédéistes invités au festival *BoomFest* de Saint-Pétersbourg, en Russie. Il a illustré entre autres le générique de la télésérie *La Galère* à Ici Radio-Canada. En 2016, il a participé au projet *Correspondances* de Lyon.

Dans la collection MAT, ses illustrations sont parfois conçues comme de petites pauses détente au fil des chapitres.

D'autres fois, elles sont des illustrations essentielles à la compréhension et à la résolution des situations qui vous sont présentées.

Dans les pages d'ouverture des chapitres, elles illustrent la situation concrète qui vous amène à vous plonger dans la réalité mathématique des activités d'apprentissage et des situations-problèmes. Ces activités et ces situations vous permettent d'acquérir la maîtrise des savoirs mathématiques visée par le module.



Vous voulez en savoir plus sur Paul Bordeleau ?
Voici ses coordonnées : www.paulbordeleau.com

Pour en savoir un peu plus...

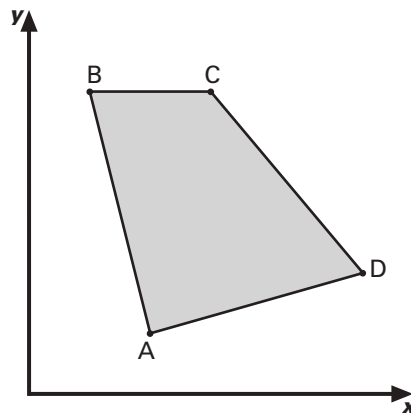
La droite baladeuse

On peut se servir de ce qu'on appelle la *droite baladeuse* pour trouver le couple (x, y) qui optimise une situation. Pour ce faire, on doit d'abord représenter le polygone de contraintes, puis se servir d'une droite de pente $-\frac{A}{B}$, où A et B sont les coefficients de la fonction objectif :

$$Z = Ax + By + C.$$

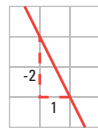
Exemple

On considère des variables x et y soumises aux contraintes représentées par le polygone de contraintes ci-dessous :

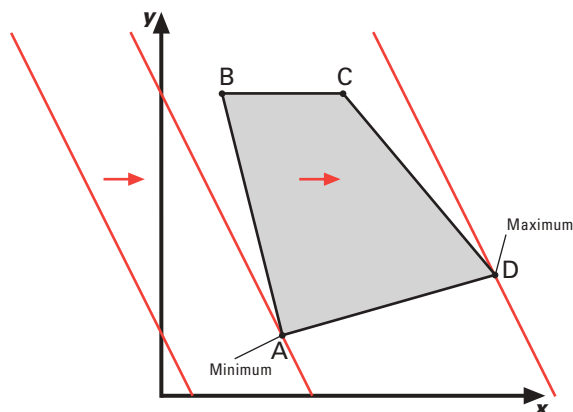


Pour les curieux,
un prolongement
des connaissances
et de l'enrichissement.

La fonction objectif est $Z = 10x + 5y - 2$. La pente de la droite est $-\frac{A}{B}$, c'est-à-dire $-\frac{10}{5}$, soit $-\frac{2}{1}$.
La droite baladeuse a pour pente $-\frac{2}{1}$:



À partir de la gauche du graphique, on déplace, vers la droite, une droite de pente -2 jusqu'à ce qu'elle rencontre le premier sommet : c'est le point qui donne lieu au minimum de la fonction objectif. Si l'on poursuit le déplacement de la droite baladeuse vers la droite, on obtient le maximum de la fonction objectif lorsque l'on rencontre le dernier sommet :



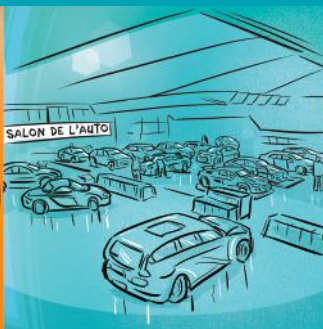
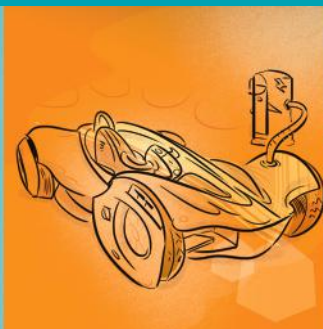
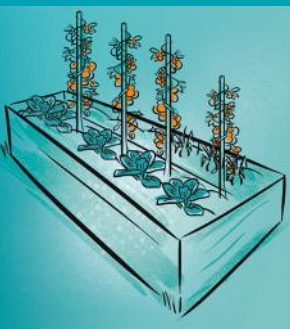
Le MAT 5170

Vise l'acquisition de deux grandes compétences transversales: résoudre des problèmes et exploiter l'information. Au moyen d'un procédé intégrateur: l'optimisation d'une situation à l'aide de la programmation linéaire.

ÉDITION
OCTOBRE
2025

MAT_{SN} 5170 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE



Notre maison n'a qu'une seule et unique raison d'être depuis sa création il y a plus d'un demi-siècle: publier des ouvrages de qualité irréprochable, de bonne tenue, aux contenus solides, privilégiant des démarches en accord avec les principes des différentes approches pédagogiques, et libres de tout compromis de caractère purement commercial.

ISBN 978-2-7615-0779-0



401 1763

Florence Grandchamp
Drita Neziri
Abdelkader Amara
Raymond Thériault

ÉDITION
OCTOBRE
2025

OPTIMISATION EN CONTEXTE FONDAMENTAL

MAT
AT_{SN}
A 5170 2

FORMATION DE BASE DIVERSIFIÉE

Ce document est disponible
gratuitement pour
l'enseignant(e). Il suffit
d'en faire la demande
à editions@ebbp.ca



TIRÉ À PART

Corrigé des *Situations d'évaluation de fin de chapitre*

Grilles d'évaluation

Corrigé du *Prêt pour l'évaluation de fin de module?*



L'éditeur permet la reproduction
de ce document.